गणित (Mathematics) : XII

समय : 3 घंटे 15 मिनट] [पूर्णांक : 100

MODEL PAPER – 1

● **परीक्षार्थियों के लिये निर्देश :**

1. परीक्षार्थी OMR उत्तर पत्रक पर अपना प्रश्न पुस्तिका क्रमांक (10 अंकों का) अवश्य लिखें।
2. परीक्षार्थी यथासंभव अपने शब्दों में ही उत्तर दें।
3. दाहिनी ओर हाशिये पर दिये हुए अंक पूर्णांक निर्दिष्ट करते हैं।
4. प्रश्नों को ध्यानपूर्वक पढ़ने के लिए परीक्षार्थियों को 15 मिनट का अतिरिक्त समय दिया गया है।
5. यह प्रश्न पुस्तिका दो खण्डों में है–खण्ड-'अ' एवं खण्ड-'ब'।
6. खण्ड-'अ' में 100 वस्तुनिष्ठ प्रश्न हैं, जिनमें से किन्हीं 50 प्रश्नों का उत्तर देना अनिवार्य है। 50 से अधिक प्रश्नों के उत्तर देने पर प्रथम 50 उत्तरों का ही मूल्यांकन किया जाएगा। प्रत्येक प्रश्न के लिए 1 अंक निर्धारित है। सही उत्तर उपलब्ध कराये गए OMR उत्तर पत्रक में दिए गए सही विकल्प को नीले / काले बॉल पेन से प्रगाढ़ करें। किसी भी प्रकार के ह्वाइटनर / तरल पदार्थ / ब्लेड / नाखून आदि का OMR उत्तर पत्रक में प्रयोग करना मना है, अन्यथा परीक्षा परिणाम अमान्य होगा।
7. खण्ड-ब में 30 लघु उत्तरीय प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न के लिए 2 अंक निर्धारित है, जिनमें से किन्हीं 15 प्रश्नों का उत्तर देना अनिवार्य है। इनके अतिरिक्त, इस खण्ड में 8 दीर्घ उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं, प्रत्येक के लिए 5 अंक निर्धारित है, जिनमें से किन्हीं 4 प्रश्नों का उत्तर देना अनिवार्य है।
8. किसी प्रकार के इलेक्ट्रॉनिक उपकरण का प्रयोग पूर्णतया वर्जित है।

खण्ड–अ (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

प्रश्न संख्या 1 से 100 तक के प्रत्येक प्रश्न के साथ चार विकल्प दिये गए हैं, जिनमें से एक सही है। अपने द्वारा चुने गए सही विकल्प को OMR शीट पर चिह्नित करें। किन्हीं 50 प्रश्नों का उत्तर दें। $50 \times 1 = 50$

1. यदि किसी समुच्चय A में एक संबंध R इस प्रकार हो कि $(x, y) \in R, (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$ तो संबंध R कहलाता है

(A) स्वतुल्य (B) सममित (C) संक्रामक (D) तुल्यता

2. $\cos^{-1} x, x \in [-1, 1] =$

(A) $\frac{\pi}{2} + \sin^{-1} x$ (B) $\pi - \sin^{-1} x$

(C) $2\pi + \sin^{-1} x$ (D) $\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x$

3. $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y =$

(A) $\tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$ (B) $\tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$

(C) $\tan^{-1}\left(\frac{1-xy}{x+y}\right)$ (D) $\tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$

4. $\begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$

(A) 16 (B) 11 (C) 6 (D) 42

5. $\begin{vmatrix} p & q \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

(A) $4p - 5q = 0$ (B) $\frac{p}{5} + \frac{q}{4} = 0$

(C) $\frac{p}{4} - \frac{q}{5} = 0$ (D) $\frac{p}{4} + \frac{q}{5} = 0$

6. $\begin{vmatrix} 8 & 3 & -4 \\ 7 & 5 & 6 \\ 15 & 8 & 2 \end{vmatrix} =$

(A) 126 (B) 234 (C) 0 (D) 55

7. यदि $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **तो** $I^3 =$

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

8. $3\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} =$

(A) $\begin{bmatrix} 3x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 3x & 3y \\ z & w \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 3x & 3y \\ 3z & w \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 3x & 3y \\ 3z & 3w \end{bmatrix}$

9. निम्नलिखित में से कौन शून्य आव्यूह है ?

(A) $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

10. $5\begin{bmatrix} x & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 1 \\ 21 & 52 \end{bmatrix} \Rightarrow (x, y) =$

(A) (4, 6) (B) (5, 9) (C) (4, 9) (D) (9, 4)

11. $\frac{d}{dx}(5x^2) =$

(A) $5x$ (B) $\frac{5x^3}{3}$ (C) $10x$ (D) 5

12. $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin 3x}{3}\right) =$

(A) $3\cos 3x$ (B) $\cos 3x$ (C) $\frac{\cos 3x}{9}$ (D) $-\cos 3x$

13. $\frac{d}{dx}(e^{2x}) =$

(A) e^{2x} (B) $\frac{e^{2x}}{2}$ (C) $2e^{2x}$ (D) $3e^{2x}$

14. $\frac{d}{dx}(\cos 2x) =$

(A) $\sin 2x$ (B) $2\sin 2x$ (C) $-2\sin 2x$ (D) $-2\cos 2x$

15. $\frac{d}{dx}(\cos x + e^x) =$

(A) $\cos x - e^x$ (B) $-\sin x - e^x$ (C) $-\sin x + e^x$ (D) $\sin x + e^x$

16. $\frac{d}{dx}(\log 2x) =$

(A) $\frac{1}{2x}$ (B) $\frac{1}{x}$ (C) $\frac{2}{x}$ (D) $2x$

17. $\frac{d}{dx}[e^{\cos x}] =$

(A) $e^{\cos x}$ (B) $-\sin x.\, e^{\cos x}$ (C) $\sin x\, e^{\cos x}$ (D) $\cos x.\, e^{\cos x}$

18. $\frac{d}{dx}(a^{2x}), a > 0 =$

(A) $2a^{2x}$ (B) $2a^{2x}\log a$ (C) $a^{2x}\log a$ (D) $\frac{a^{2x}}{\log a}$

19. $x = a\cos\theta,\ y = a\sin\theta \Rightarrow \frac{dy}{dx} =$

(A) $\sec 2\theta$ (B) $-\cot\theta$ (C) $-\tan\theta$ (D) $\cot^2\theta$

20. $\frac{d^2}{dx^2}(x^{20}) =$

(A) $20x^{19}$ (B) $20x^{18}$ (C) $380x^{18}$ (D) x^{18}

21. $x = 2$ पर वक्र $y = x^3 - 2x$ पर स्पर्श रेखा की ढाल है

(A) 9 (B) 10

(C) 11 (D) इनमें से कोई नहीं

22. x के सभी वास्तविक मानों के लिए $\frac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}$ का न्यूनतम मान है

(A) 1 (B) 0

(C) $\frac{1}{3}$ (D) इनमें से कोई नहीं

23. वक्र $x^2 = 4y$ के बिंदु (2, 1) पर अभिलंब है

(A) $x + y = 3$ (B) $x - y = 3$

(C) $x + y = 1$ (D) इनमें से कोई नहीं

24. $3\int x^2 dx =$

(A) $\frac{x^3}{3} + C$ (B) $x^3 + C$ (C) $x^2 + C$ (D) $6x + C$

25. $4\int \sin 4x\, dx =$

(A) $K - \cos 4x$ (B) $K - \frac{\cos 4x}{4}$ (C) $K + \frac{\cos 4x}{4}$ (D) $K + \cos 4x$

26. $\int \cos 7x\, dx =$

(A) $K - \sin 7x$ (B) $K - 7\sin 7x$

(C) $K + \frac{\sin 7x}{7}$ (D) $K + \sin 7x$

27. $\int e^x dx =$

(A) $e^x + K$ (B) $\frac{e^{x+1}}{x+1} + K$ (C) $\log|x| + K$ (D) $2e^{2x} + K$

28. $\int \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} dx =$

(A) $\frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x + K$ (B) $\frac{x^2}{2} - 3x + K$

(C) $\frac{x^2}{2} + 3x + K$ (D) $\frac{x^3}{4} - 6x^2 + K$

29. $\int \sec x\, dx =$

(A) $\log|\tan x| + K$ (B) $\log|\sec x| + K$

(C) $\log|\sec x + \tan x| + K$ (D) $\log|\cot x| + K$

30. $\int \cos^2 x\, dx =$

(A) $\frac{\cos^3 x}{3} + K$ (B) $\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + K$

(C) $x + \sin 2x + K$ (D) $\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + K$

31. $\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx =$

(A) $\tan x + \cot x + K$ (B) $\tan x + \operatorname{cosec} x + K$

(C) $-\tan x + \cot x + K$ (D) $\tan x + \sec x + K$

32. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} =$

(A) $\frac{1}{2a}\log|a^2 - x^2| + K$ (B) $\frac{1}{2a}\log|a^2 + x^2| + K$

(C) $\frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + K$ (D) $\frac{1}{2a}\log\left|\frac{a-x}{a+x}\right| + K$

33. $\int_2^3 x^2 dx =$

(A) 19 (B) $\frac{19}{2}$ (C) $\frac{19}{3}$ (D) $\frac{19}{6}$

34. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^5 x\, dx =$

(A) 0 (B) 1 (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{3}{4}$

35. $\int_0^1 (\tan^{-1}x + \cot^{-1}x)\,dx =$

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) 0 (C) -1 (D) $\frac{\pi}{4}$

36. अवकलन समीकरण $\frac{d^3y}{dx^2} + 2\left(\frac{d^2y}{dx^3}\right)^2 - \frac{dy}{dx} + y = 0$ का degree है

(A) 1 (B) 2
(C) 3 (D) इनमें से कोई नहीं

37. अवकलन समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + y\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + y = 0$ का order है

(A) 1 (B) 2
(C) 3 (D) इनमें से कोई नहीं

38. अवकलन समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$ का हल है

(A) $\sin^{-1}y = \sin^{-1}x + K$ (B) $\cos^{-1}y = \cos^{-1}x + K$
(C) $\tan^{-1}y = \tan^{-1}x + K$ (D) इनमें से कोई नहीं

39. अवकलन समीकरण $\frac{dy}{dx} - y = \cos x$ का समाकलन गुणक है

(A) $e^{\cos x}$ (B) $e^{-\cos x}$ (C) e^{-x} (D) e^{x}

40. अवकलन समीकरण $x\frac{dy}{dx} - y = 2x^3, x > 0$ का हल है

(A) $y = x^3 + K$ (B) $y = x^3 + Kx$
(C) $y = 3x^2 + K$ (D) इनमें से कोई नहीं

41. $|\vec{j}| =$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

42. $|\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}| =$

(A) 1 (B) 3 (C) 2 (D) $\sqrt{3}$

43. $\vec{i} \cdot \vec{j} =$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) $\vec{K}$

44. निम्नलिखित में कौन सत्य है ?

(A) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ (B) $\vec{j} \times \vec{j} = \vec{i}$

(C) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a}$ (D) $\vec{i} \times \vec{k} = \vec{j}$

45. y-अक्ष की दिक्-कोज्याएँ हैं

(A) 0, 0, 0 (B) 1, 0, 0 (C) 0, 1, 0 (D) 0, 0, 1

46. यदि दो सरल रेखाओं की दिक् कोज्याएँ l_1, m_1, n_1 और l_2, m_2, n_2 हों तथा वे परस्पर लम्ब हों तो

(A) $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$ (B) $\frac{l_1}{l_2} + \frac{m_1}{m_2} + \frac{n_1}{n_2} = 0$

(C) $l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$ (D) $l_1^2l_2^2 + m_1^2m_2^2 + n_1^2n_2^2 = 0$

47. यदि एक रेखा के दिक् अनुपात $-18, 12, -4$ हैं तो इसकी दिक् कोज्याएँ हैं

(A) $\frac{-9}{11}, \frac{6}{11}, \frac{-1}{11}$ (B) $\frac{9}{11}, \frac{-6}{11}, \frac{2}{11}$

(C) $\frac{-9}{11}, \frac{-6}{11}, \frac{-2}{11}$ (D) इनमें से कोई नहीं

48. तलों $2x - y + z + 8 = 0$ और $x + y + 2z - 14 = 0$ के बीच का न्यून कोण है

(A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 90°

49. निम्नलिखित में कौन उद्देशीय फलन हैं ?

(A) $x \geq 0$ (B) $y \geq 0$ (C) $z = x + y$ (D) इनमें सभी

50. निम्नलिखित में कौन व्यवरोध नहीं है ?

(A) $x \geq 0, y \geq 0$ (B) $2x + 3y \leq 5$ (C) $z = 7x + 3y$ (D) इनमें सभी

51. व्यवरोधों $x + y \leq 5, x \geq 0, y \geq 0$ के अंतर्गत $z = 2x + 3y$ का अधिकतम मान है

(A) 10 (B) 15
(C) 20 (D) इनमें से कोई नहीं

52. निम्न में कौन सत्य है ?

(A) $P(E/F) = \frac{P(E \cup F)}{P(F)}$ (B) $P(E/F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$

(C) $P(E/F) = P(E).P(F)$ (D) $P(E/F) = P(E) + P(F)$

53. एक सिक्के को 10 बार उछाला जाता है। ठीक छः चित आने की प्रायिकता है

(A) $\frac{101}{512}$ (B) $\frac{103}{512}$ (C) $\frac{105}{512}$ (D) $\frac{109}{512}$

54. यदि N पर एक द्विआधारी संक्रिया '0' इस प्रकार हो कि $a\ 0\ b = a^3 + b^3\ \forall\ a, b \in N$ तो 2 0 3 बराबर है

(A) 35 (B) 53
(C) 46 (D) इनमें से कोई नहीं

55. $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{a}) =$

(A) $\vec{a}$ (B) $3\vec{a}$ (C) $|\vec{a}|^3$ (D) 0

56. $[\vec{j}\ \vec{k}\ \vec{i}] =$

(A) 0 (B) $\vec{0}$ (C) 1 (D) -1

57. $(\vec{j} \times \vec{k}) \times \vec{i} =$

(A) $\vec{0}$ (B) 1 (C) -1 (D) -2

58. $a\ 0\ b = a^2 + b^2$ प्रकार से परिभाषित N में एक द्विआधारी संक्रिया 0 है। निम्नलिखित में कौन सत्य है ?

(A) 0 साहचर्य और क्रम विनिमेय दोनों हैं
(B) 0 क्रम विनिमेय है किंतु साहचर्य नहीं है
(C) 0 साहचर्य है किन्तु क्रम विनिमेय नहीं है
(D) 0 न तो क्रम विनिमेय है और न साहचर्य है

59. ताश की एक गड्डी से यादृच्छया दो पत्ते निकाले जाते हैं। यदि X इक्कों की संख्या हो, तो E(X) का मान है

(A) $\frac{37}{221}$ (B) $\frac{5}{13}$ (C) $\frac{1}{13}$ (D) $\frac{2}{13}$

60. यदि $X = \{1, 2, 3\}$ तो (1, 2) और (2, 1) को शामिल करते हुए तुल्यता संबंधों की संख्या है

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) कोई नहीं

61. एक अतिरिक्त समुच्चय A पर परिभाषित एक संबंध जो n अवयवों को रखता है

(A) n संबंध (B) 2^{n^2} संबंध (C) n^2 संबंध (D) 2 संबंध

62. वास्तविक संख्याओं के समुच्चय पर परिभाषित संबंध $R = \{(a,b) \in R \times r : 1 + ab > 0\}$ है

(A) स्वतुल्य और संक्रमक (B) समामित और संक्रमक
(C) स्वतुल्य और क्रमित (D) समतुल्य संबंध

63. यदि $f(x)+2f(1-x)=x^2+2\ \forall\ x\in R$, तो $f(x)=$

(A) x^2-2 (B) 1 (C) $\frac{1}{3}(x-2)^2$ (D) कोई नहीं

64. फलन $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$ का आवर्तकाल

(A) π (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) 2π (D) कोई नहीं

65. $\cos^{-1}\left(\cos\frac{5\pi}{3}\right)+\sin^{-1}\left(\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ का मान है

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{5\pi}{2}$ (C) $\frac{10\pi}{3}$ (D) 0

66. $0<|x|<\sqrt{2}$ के लिए $\sin^{-1}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{4}\cdots\right)$

$+\cos^{-1}\left(x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{2}\cdots\right)=\frac{\pi}{2}$ तब x का मान है

(A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) $-\frac{1}{2}$ (D) -1

67. त्रिकोणमितीय समीकरण $\sin^{-1}x=2\sin^{-1}a$ का एक हल रखता है

(A) $\frac{1}{2}<|a|<\frac{1}{2}$ (B) a के सभी वास्तविक मान

(C) $|a|<\frac{1}{2}$ (D) $|a|\geq\frac{1}{2}$

68. $\sin(\tan^{-1}x),\ |x|<1$ के बराबर है

(A) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (D) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

69. अगर $f(x)=\begin{bmatrix}\cos x & -\sin x & 0\\ \sin x & \cos x & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ तो $F(x).F(y)=$

(A) $F(x.y)$ (B) $F(x-y)$ (C) $F(x+y)$ (D) $F\left(\frac{x}{y}\right)$

70. यदि $\Delta=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ तब $\Delta^r+\Delta=1$ यदि

(A) $\theta=n\pi;\ n\in z$ (B) $\theta=(2n+1)\frac{\pi}{2};\ n\in z$

(C) $\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{3};\ n\in z$ (D) $\theta=-n\pi;\ n\in z$

71. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ तब $A^2=?$

(A) A (B) 2A (C) 3A (D) 1

72. यदि $\begin{bmatrix}x+y & y\\ 2x & x-y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}$ तो xy बराबर होगा

(A) -5 (B) -4 (C) 4 (D) 5

73. यदि a, b, c समान्तर श्रेणी A.P. में हो, तब

$\begin{vmatrix}x+1 & x+2 & x+a\\ x+2 & x+3 & x+b\\ x+3 & x+4 & x+c\end{vmatrix}$ का मान है

(A) 4 (B) -3 (C) 0 (D) abc

74. यदि a, b, c भिन्न-भिन्न हो और $\begin{vmatrix}a & a^2 & 1+a^3\\ b & b^2 & 1+b^3\\ c & c^2 & 1+c^3\end{vmatrix}=b$ तब abc का मान है

(A) b (B) -1 (C) 3 (D) -3

75. यदि $\begin{vmatrix}a+r & r+p & p+a\\ a+b & b+c & c+a\\ z+x & x+y & y+z\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a & q & r\\ c & a & b\\ y & z & x\end{vmatrix}$ तब k का मान है

(A) 2 (B) 3 (C) -1 (D) कोई नहीं

76. यदि $\begin{vmatrix}x & 2\\ 18 & x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6 & 2\\ 18 & 6\end{vmatrix}$ तब x का मान है

(A) 6 (B) ±6 (C) -1 (D) 6,6

77. यदि $y=\sec^{-1}\left[\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right]+\sin^{-1}\left[\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right]$ हो, तो $\frac{dy}{dx}=$

(A) 1 (B) π (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) 0

78. यदि $y=\sec(\tan^{-1}x)$ हो, तो $\frac{dy}{dx}=$

(A) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ (B) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ (C) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (D) कोई नहीं

79. यदि $x^y=1$ तब $\frac{dy}{dx}=$

(A) $\frac{y(x\log y-y)}{x(y\log x-y)}$ (B) $\frac{y(x\log y-y)}{x(y\log x-x)}$

(C) $\frac{y(x\log y+y)}{x(y\log x-x)}$ (D) $\frac{-y(x\log y+y)}{x(y\log x+x)}$

80. यदि $x=a(\cos\theta+\theta\sin\theta),\ y=a(\sin\theta-\theta\cos\theta),\ \frac{dy}{dx}=$

(A) $\cos\theta$ (B) $\tan\theta$ (C) $\sec\theta$ (D) $\operatorname{cosec}\theta$

81. $\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2dx$ बराबर है

(A) $\frac{x^2}{2}+\log e^x-2x+c$ (B) $\frac{x^2}{2}+\log e+2x+c$

(C) $\frac{x^2}{2}+\log x-2x+c$ (D) कोई नहीं

82. $\int\frac{(1+\log x)^2}{x}dx=$

(A) $\frac{1}{3}(1+\log x)^3+c$ (B) $\frac{1}{2}+\log x)^2+c$

(C) $\log(\log\sqrt{1+x})+c$ (D) कोई नहीं

83. $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin x \cos x} dx$ बराबर है

(A) $2\sqrt{\cot x} + e$ (B) $\frac{\sqrt{\tan x}}{2} + c$

(C) $2\sqrt{\tan x} + c$ (D) कोई नहीं

84. $\int \frac{x^4+1}{x^2+1} dx$ बराबर है

(A) $\frac{x^3}{3} + x + \tan^{-1} x + c$ (B) $\frac{x^3}{3} - x \tan x + c$

(C) $\frac{x^3}{3} + x + 2\tan^{-1} x + c$ (D) $\frac{x^3}{3} - x + 2\tan^{-1} x + c$

85. अवकल समीकरण $2x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ की कोटि है

(A) 2 (B) 1 (C) शून्य (D) कोई नहीं

86. अवकल समीकरण $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{2/3} = \left(y + \frac{dy}{dx}\right)^{\frac{1}{2}}$ का घात और कोटि निम्न में से कौन है ?

(A) 4, 2 (B) 2, 4 (C) 3, 4 (D) 4, 3

87. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ का हल है

(A) $x - y = k$ (B) $x^2 - y^2 = k$

(C) $x^3 - y^3 = k$ (D) $xy = k$

88. अवकल समीकरण $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{d^2y}{dx^2}$ का घात है

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

89. $x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ का मापांक निम्नांकित में कौन-सा होगा ?

(A) $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

(C) $x^2 + y^2 + z^2$ (D) कोई नहीं

90. $x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ की दिक्-कोज्याएँ निम्नांकित में कौन-सी होगी?

(A) $\sqrt{-x^2+y^2+z^2}, \sqrt{x^2-y^2+z^2}, \sqrt{x^2+y^2-z^2}$

(B) $\frac{x}{\sqrt{-x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2-y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2-z^2}}$

(C) $x\sqrt{-x^2+y^2+z^2}, y\sqrt{x^2-y^2+z^2}, z\sqrt{x^2+y^2-z^2}$

(D) $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2-z^2}}$

91. यदि C, AB का मध्यबिंदु हो और P, AB के बाहर कोई बिन्दु हो, तो

(A) $\vec{PA} + \vec{PB} = 2\vec{PC}$ (B) $\vec{PA} + \vec{PB} = \vec{PC}$

(C) $\vec{PA} + \vec{PB} = 2\vec{PC} = \vec{O}$ (D) कोई नहीं

92. $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b})$ के स्थान पर निम्नांकित में कौन-सा लिखा जा सकता है ?

(A) $\vec{a} \times \vec{b}$ (B) $2\vec{a} \times \vec{b}$ (C) $\vec{a}^2 - \vec{b}$ (D) $2\vec{b} \times \vec{b}$

93. मूल बिन्दु से बिन्दु (–3, 4, 5) की दूरी है

(A) 50 (B) $5\sqrt{2}$ (C) 6 (D) कोई नहीं

94. दो सरल रेखाओं की दिक्कोज्याएँ l_1, m_1, n_1 और l_2, m_2, n_2 है तो उनके बीच के कोण की कोज्या होगी

(A) $(l_1 + m_1 + n_1)(l_2 + m_2 + n_2)$

(B) $\frac{l_1}{l_2} + \frac{m_1}{m_2} + \frac{n_1}{n_2}$

(C) $l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2$ (D) कोई नहीं

95. तल $7x + 4y - 2z + 5 = 0$ पर अभिलंब के दिक्अनुपात है

(A) 7, 4, –2 (B) 7, 4, 5

(C) 7, 4, 2 (D) 4, –2, 2.

96. रेखा $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ और $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$ हैं

(A) समांतर (B) असममित (C) प्रतिच्छेदित (D) कोई नहीं

97. सुसंगत क्षेत्र बिंदुओं का वह समुच्चय है जो संतुष्ट करता है

(A) उद्देश्य फलन को (B) कुछ व्यवरोध को

(C) सभी व्यवरोध को (D) कोई नहीं

98. सुसंगत क्षेत्र के सभी बिन्दुओं के अधिकतम या न्यूनतम उद्देश्य फलन के लिए बिन्दु है

(A) सुसंगित क्षेत्र के अंदर (B) सुसंगति क्षेत्र के परिसीमा पर

(C) सुसंगति क्षेत्र के परिसीमा के शीर्ष पर

(D) कोई नहीं

99. रैखिक प्रोग्रामन समस्या का उद्देश्य फलन

(A) व्यवरोध (B) इष्टतम के लिए फलन

(C) चरों के मध्य संबंध (D) कोई नहीं

100. निर्णय चरों के मानों का समुच्चय रैखिक व्यवरोधों को *OPP* के ऋणेतर प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है, कहलाती है

(A) अपरिबद्ध हल (B) इष्टतम हल

(C) सुसंगत हल (D) कोई नहीं

खण्ड–ब (गैर-वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न संख्या 1 से 30 लघु उत्तरीय हैं। किन्हीं 15 प्रश्नों के उत्तर दें। प्रत्येक के लिए 2 अंक निर्धारित है। $15 \times 2 = 30$

1. यदि $f: R \to R$ इस प्रकार परिभाषित है कि $f(x) = 2x + 7, x \in R$, तो $f^{-1}: R \to R$ परिभाषित करें और $f^{-1}(3)$ का मान ज्ञात करें।

2. सिद्ध करें कि $4(\cot^{-1} 3 + \text{cosec}^{-1}\sqrt{5}) = \pi$

3. $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ का मुख्य मान ज्ञात करें।

4. x का मान ज्ञात करें जब $\begin{vmatrix} x & 7 \\ x & x \end{vmatrix} = -10$

5. सारणिक का मान ज्ञात करें : $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

6. x, y, z और w ज्ञात करें जबकि

$$3\begin{bmatrix}x & y\\ z & w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x & 6\\ -1 & 2w\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & x+y\\ z+w & 3\end{bmatrix}$$

7. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ -4 & 2 & 5\end{bmatrix}$ और $B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ तो AB और BA ज्ञात करें यदि संभव हो।

8. यदि $y=\sqrt{5+2x-4x^5}$ तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करें।

9. यदि $y=\sqrt{\cos(\sin\sqrt{x})}$ तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करें।

10. $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करें यदि, $y=\sqrt{x}\tan(\log\sqrt{x})$

11. $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करें यदि, $x^2y^2=1+xy+y^2$.

12. $z=2x+y$ का अधिकतमीकरण करें जबकि व्यवरोध है : $x+2y\le 20, x\ge 0, y\ge 0$

13. समाकलन करें : $\int \cos x.\cos 5x\,dx$.

14. समाकलन करें : $\int \frac{\operatorname{cosec} x\,dx}{\operatorname{cosec} x+\cot x}$

15. मान निकालें : $\int_0^{\pi/2} \cos 4x\,dx$

16. मान निकालें : $\int_0^{\pi/4} \frac{1+\sin 2x}{\cos x+\sin x}dx$

17. हल करें : $\sqrt{a+x}\frac{dy}{dx}+x=0$

18. हल करें : $\frac{dy}{dx}=x-y$

19. यदि $\vec{a}=3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}, \vec{b}=\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$ तो $\vec{a}\times\vec{b}$ ज्ञात करें।

20. सिद्ध करें कि बिंदु $\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c},\ 2\vec{a}+3\vec{b}-4\vec{c},\ -7\vec{b}+10\vec{c}$ समरेख है।

21. सिद्ध करें कि $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=2(\vec{a}\times\vec{b})$

22. तलों $x+2y+3z=6$ और $3x-3y+z=1$ के बीच का कोण निकालें।

23. उस बिंदु के निर्देशांक ज्ञात करें जहाँ रेखा $\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+3}{4}$, तल $x+y+4z=6$ से मिलती है।

24. दो सिक्के उछाले जाते हैं। यदि A = पहले सिक्के पर शीर्ष आने की घटना तथा B = दूसरे पर पृष्ठ आने की घटना तो सिद्ध करें कि A और B स्वतंत्र हैं।

25. यदि A और B दो घटनाएँ इस प्रकार हों कि $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{1}{4}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{5}$ तो P (A/B) और P (B/A) निकालें।

26. p के मान ज्ञात करें जिससे रेखाएँ $\frac{11-x}{p}=\frac{3y-3}{2}=\frac{17-z}{5}$ और $\frac{x-22}{3p}=\frac{2y-7}{27p}=\frac{z-100}{6/5}$ परस्पर लंब हो।

27. मान ज्ञात करें : $(2\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k}).(2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})\times(\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k})$

28. जाँच कीजिए कि क्या R में, $R=\{(a,b): a\le b^3\}$ द्वारा परिमापित संबंध स्वतुल्य, सममित अथवा संक्रमक है ?

29. सिद्ध करें :

$$\cos\left[\tan^{-1}\left\{\sin(\cot^{-1}x)\right\}\right]=\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+2}}$$

30. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$ तो जाँच करें कि $A^2-4A-5I=0$.

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न संख्या 31 से 38 दीर्घ उत्तरीय प्रश्न हैं। किन्हीं 4 प्रश्नों के उत्तर दें। प्रत्येक के लिए 5 अंक निर्धारित हैं। $4\times 5=20$

31. यदि $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 5 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$ तो प्रारम्भिक रूपांतरण से A का व्युत्क्रम आव्यूह ज्ञात करें।

32. यदि $x^m y^n=(x+y)^{m+n}$ तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करें।

33. सिद्ध करें कि $x-\sin x$ का कोई उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ मान नहीं है।

34. समाकलन करें : $\int \tan^4 x\,dx$

35. सिद्ध करें कि $\int_0^{\pi/2}\log\cos x\,dx=\frac{-\pi}{1}\log 2$.

36. यदि $\vec{a}=3\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}$ और $\vec{b}=7\hat{i}-3\hat{j}+6\hat{k}$ तो $|(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})|$ ज्ञात करें।

37. अधिकतमीकरण करें : $z=x+y$
जबकि
$x-y\le -1$
$-x+y\le 0$
$x, y\ge 0$

38. एक सिक्के की दो उछालों में शीर्षों की संख्या का प्रसरण ज्ञात करें।

उत्तर

खण्ड–अ (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

1. (C)	2. (D)	3. (B)	4. (C)	5. (C)	6. (C)
7. (A)	8. (D)	9. (B)	10. (C)	11. (C)	12. (B)
13. (C)	14. (C)	15. (C)	16. (B)	17. (B)	18. (A)
19. (B)	20. (C)	21. (B)	22. (A)	23. (A)	24. (B)
25. (A)	26. (C)	27. (B)	28. (B)	29. (C)	30. (B)
31. (A)	32. (C)	33. (C)	34. (A)	35. (A)	36. (A)
37. (B)	38. (C)	39. (C)	40. (A)	41. (B)	42. (D)
43. (A)	44. (A)	45. (C)	46. (C)	47. (A)	48. (C)
49. (C)	50. (B)	51. (B)	52. (B)	53. (C)	54. (A)
55. (D)	56. (C)	57. (A)	58. (A)	59. (D)	60. (B)
61. (C)	62. (D)	63. (C)	64. (B)	65. (D)	66. (B)

67. (D)	**68.** (D)	**69.** (C)	**70.** (C)	**71.** (C)	**72.** (A)
73. (C)	**74.** (B)	**75.** (A)	**76.** (D)	**77.** (D)	**78.** (A)
79. (D)	**80.** (B)	**81.** (B)	**82.** (A)	**83.** (C)	**84.** (D)
85. (A)	**86.** (A)	**87.** (B)	**88.** (A)	**89.** (A)	**90.** (D)
91. (A)	**92.** (B)	**93.** (B)	**94.** (C)	**95.** (A)	**96.** (C)
97. (C)	**98.** (C)	**99.** (B)	**100.** (C)		

खण्ड–ब (गैर-वस्तुनिष्ठ प्रश्न)
लघु उत्तरीय प्रश्न

1. दिया है–

यदि $f: R \to R$ जहाँ $f(x) = 2x + 7, x \in R$ ...(i)

माना $f(x) = y$

तब $y = 2x + 7 \Rightarrow y - 7 = 2x \Rightarrow x = \dfrac{y-7}{2}$ ...(ii)

समीकरण (ii) में $x \leftrightarrow y$ का मान रखने पर हम पाते हैं

$$y = \frac{x-7}{2} \quad \therefore f^{-1}(x) = \frac{x-7}{2}$$

इसलिए, $f^{-1}(3) = \dfrac{3-7}{2} = -\dfrac{4}{2} = -2$

अत: $f^{-1}(3) = -2$ **Ans.**

2. बायाँ पक्ष $= 4(\cot^{-1}3 + \operatorname{cosec}^{-1}\sqrt{5})$

$$= 4\left(\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{2}\right)$$

$$\left[\because \tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)\right]$$

$$= 4\tan^{-1}\left(\frac{5}{6}\times\frac{6}{5}\right) = 4\tan^{-1}(1)$$

$$= 2.\,2\tan^{-1}(1) = 2\tan^{-1}\frac{2.1}{1-(1)^2}$$

$$\left[\because 2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}\right]$$

$= 2\tan^{-1}(0) = \pi =$ दायाँ पक्ष सिद्ध हुआ।

3. माना लिया कि $\tan y = -\sqrt{3}$

$$\therefore \quad y = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

मुख्य मान शाखा का परिसर $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

$\therefore$ y का मुख्य मान $= -\dfrac{\pi}{3}$

4. दिया है–

$$\begin{vmatrix} x & 7 \\ x & x \end{vmatrix} = -10$$

$\Rightarrow \quad x^2 - 7x = -10$

$\Rightarrow \quad x^2 - 7x + 10 = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 - 5x - 2x + 10 = 0$

$\Rightarrow \quad x(x-5) - 2(x-5) = 0$

$\Rightarrow \quad (x-5)(x-2) = 0$

यदि $x - 5 = 0$ तो $x = 5$

पुन: यदि $x - 2 = 0$ तो $x = 2$

अत: $x = 2.5$ **Ans.**

5. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

$R_2 \to R_2 - R_1$, $R_3 \to R_1$ का प्रयोग करने पर, हम पाते हैं

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & b^2-a^2 \\ c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b-a & (b-a)(b+a) \\ c-a & (c-a)(c+a) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(c+a-b-a)$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b) = (a-b)(b-c)(c-a)$$

6. दिए हुए समीकरण से, हमें

$$\begin{bmatrix} 3x & 3y \\ 3z & 3w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+4 & 6+x+y \\ -1+z+w & 2w+3 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \quad 3x = x + 4$ ...(i)

$3y = 6 + x + y$ ...(ii)

$3z = -1 + z + w$ ...(iii)

$3w = 2w + 3$ ...(iv)

(i) $\Rightarrow 2x = 4 \therefore x = 2$

(ii) $\Rightarrow 3y = 6 + 2 + y \Rightarrow 2y = 8 \therefore y = 4$

(iv) $\Rightarrow w = 3$

और (iii) $\Rightarrow 2z = -1 + w = -1 + 3 = 2 \therefore z = 1$

अत: $x = 2, y = 4, z = 1$ और $w = 3$

7. चूँकि A एक 2×3 आव्यूह है और B एक 3×2 आव्यूह है, इसलिए AB और BA दोनों ही परिभाषित है– AB, 2×2 order का आव्यूह है जबकि BA, 3×3 order का एक आव्यूह है।

अब, $AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot2 + (-2)\cdot4 + 3\cdot2 & 1\cdot3 + (-2)\cdot5 + 3\cdot1 \\ (-4)\cdot2 + 2\cdot4 + 5\cdot2 & (-4)\cdot3 + 2\cdot5 + 5\cdot1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-8+6 & 3-10+3 \\ -8+8+10 & -12+10+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$$

और $BA = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2\cdot1 + 3(-4) & 2\cdot(-2) + 3\cdot2 & 2\cdot3 + 3\cdot5 \\ 4\cdot1 + 5(-4) & 4\cdot(-2) + 5\cdot2 & 4\cdot3 + 5\cdot5 \\ 2\cdot1 + 1(-4) & 2\cdot(-2) + 1\cdot2 & 2\cdot3 + 1\cdot5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-12 & -4+6 & 6+15 \\ 4-20 & -8+10 & 12+25 \\ 2-4 & -4+12 & 6+5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -10 & 2 & 21 \\ -16 & 2 & 37 \\ -2 & -2 & 11 \end{bmatrix}$$

स्पष्टत:, $AB \neq BA$.

8. $y = \sqrt{5+2x-4x^5}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{5+2x-4x^5}$$

$$= \frac{d(5+2x-4x^5)^{1/2}}{d(5+2x-4x^5)} \times \frac{d(5+2x-4x^5)}{dx}$$

$$= \frac{d(5+2x-4x^5)^{1/2}}{d(5+2x-4x^5)} \times \left\{\frac{d(5)}{dx} \times \frac{d(2x)}{dx} - \frac{d(4x^5)}{dx}\right\}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{5+2x-4x^5}}(2-20x^4) \text{ Ans.}$$

9. दिया है– $y = \sqrt{\cos(\sin\sqrt{x})}$

तब $\frac{dy}{dx} = \frac{dt\sqrt{\cos(\sin\sqrt{x})}}{dx}$

$$= \frac{d\sqrt{\cos(\sin\sqrt{x})}}{d(\cos(\sin\sqrt{x}))} \times \frac{d(\cos(\sin\sqrt{x}))}{d(\sin\sqrt{x})} \times \frac{d(\sin\sqrt{x})}{d(\sqrt{x})} \times \frac{d(\sqrt{x})}{dx}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\cos(\sin\sqrt{x})}}(-\sin(\sin\sqrt{x})).\cos\sqrt{x}.\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-\cos\sqrt{x}.\sin(\sin\sqrt{x})}{4\sqrt{x}.\sqrt{\cos(\sin\sqrt{x})}} \text{ Ans.}$$

10. दिया है– $y = \sqrt{x}\tan(\log\sqrt{x})$ ...(i)

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d\{\sqrt{x}\tan(\log\sqrt{x})\}}{dx} \quad ...(ii)$$

माना $\sqrt{x} = u$ और $\tan(\log\sqrt{x}) = v$

अब, $\frac{d(u.v)}{dx} = u.\frac{dv}{dx} + v.\frac{du}{dx}$ ...(iii)

$$\therefore \quad \frac{dv}{dx} = \frac{d(\tan(\log\sqrt{x}))}{d(\log\sqrt{x})} \times \frac{d(\log\sqrt{x})}{d\sqrt{x}} \times \frac{d\sqrt{x}}{dx}$$

$$= \sec^2(\log\sqrt{x}) \times \frac{1}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sec^2(\log\sqrt{x})}{2x}$$

और $\frac{du}{dx} = \frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}$, u, v का मान समीकरण (iii) में रखने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x}\sec^2(\log\sqrt{x})}{2x} + \frac{\tan(\log\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\sec^2(\log\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} + \frac{\tan(\log\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2(\log\sqrt{x}) + \tan(\log\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} \text{ Ans.}$$

11. दिया है– $x^2y^2 = 1 + xy + y^2$ ...(i)

$$x^2.2y.\frac{dy}{dx} + y^2.2x = 0 + x.\frac{dy}{dx} + y + 2y.\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad (2x^2y - 2y - x).\frac{dy}{dx} = y - 2xy^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y(1-2xy)}{(2x^2y-2y-x)} \text{ Ans.}$$

12. अधिकतमीकरण $z = 2x + y$

निम्न अवरोधों के अंतर्गत

$x + 2y \le 20$ ...(i)

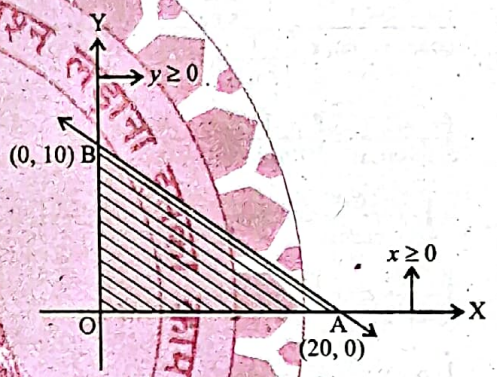
$x \ge 0$ ...(ii)

$y \ge 0$ ...(ii)

समीकरण (i) में $x = 0 \Rightarrow y = 10$

समीकरण (ii) में $y = 0 \Rightarrow x = 20$

अब हम $x + 2y \le 20$ का आलेख खींचते हैं।



अब हम हरेक corner point पर $z = 2x + y$ का मान ज्ञात करते हैं।

Corner point	Corresponding value of z
(0, 0)	0
(0, 10)	10
(20, 0)	40

अत: बिन्दु (20, 0) पर z का अधिकतम मान 40 है।

13. $I = \int \cos x.\cos 5x\, dx$

समाकलन करने पर,

$$\underset{u}{\cos x}.\int \underset{v}{\cos 5x}\, dx = \int \frac{du}{dx}.\int v\, dx\, dx$$

$$\cos x.\frac{\sin 5x}{5} - \int(-\sin x).\frac{\sin 5x}{5}dx$$

$$= \frac{1}{5}\left\{\cos x.\sin 5x\, x + \int \sin x.\sin 4x\, dx\right\}$$

माना $\int \sin x.\sin 5x\, dx = I_1$

अब $I_1 = \int \sin x.\sin 5x\, dx$

$$= \sin x.\left(\frac{-\cos 5x}{5}\right) - \int \frac{d\sin x}{dx}\left(\int \sin 5x\, dx\right)dx$$

A-ONE PRAKASHAN PATNA

$$= -\frac{1}{5}\sin x.\cos 5x - \int \cos x.\frac{(-\cos 5x)}{5}dx$$

$$= -\frac{1}{5}\sin x.\cos 5x + \frac{1}{5}\int \cos x.\cos 5x\, dx$$

$$\therefore \quad I = \frac{1}{5}\{\cos x.\sin 5x + I_1\}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{5}\{\cos x.\sin 5x\} - \frac{1}{5}\{\sin x.\cos x - I\}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{\cos x.\sin 5x}{5} - \frac{\sin x.\cos 5x}{25} + \frac{1}{24}$$

$$\Rightarrow \quad 24I = 5\cos x\,.\,\sin 5x - \sin x\,.\,\cos 5x$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{5\cos x.\sin 5x - \sin x.\cos 5x}{24} + C$$

14. $\int \frac{\text{cosec } x}{\text{cosec } x + \cot x}dx$

$$\frac{\text{cosec } x}{\text{cosec } x + \cot x} = \frac{\frac{1}{\sin x}}{\frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{1}{1+\cos x}$$

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{1}{1+\cos x}.\frac{1-\cos x}{1-\cos x}dx$$

$$= \int \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}dx$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$$

$$\int \text{cosec}^2 x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$$

माना $u = \sin x \Rightarrow du = \cos x\, dx$

अब, $\int \text{cosec}^2 x\, dx = \int \frac{du}{u^2}$

$$= -\cot x + \frac{1}{u} + t = -\cot x + \frac{1}{\sin x} + t$$

$$= -\cot x + \text{cosec } x + t$$

15. $I = \int_0^{\pi/2} \cos^4 x\, dx$

$$= \int_0^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{4} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos^2 2x}{4}\right)dx$$

$$= \int_0^{\pi/2}\left[\frac{1}{4} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)\right]dx$$

$$= \left[\frac{3}{8}\int dy + \frac{1}{4}\int 2\cos 2x\, dx + \frac{1}{32}\int 4\cos 4x\, dx\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \left[\frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C\right]_0^{\pi/2}$$

$$I = \left[\left\{\frac{3\pi}{16} + \sin\frac{\pi}{4} + \frac{1}{32}.\sin 2\pi\right\} - \left\{0 + \frac{1}{4}.\sin 0 + \frac{1}{32}.\sin 0\right\}\right]$$

$$= \frac{3\pi}{16} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{32}.0 - 0 = 0.589 + 0.707 = 1.296$$

16. $I = \int_0^{\pi/4} \frac{(\sin x + \cos x)^2}{(\sin x + \cos x)}dx$

$$= \int_0^{\pi/2} (\sin x + \cos x).dx$$

$$= \left[-\cos x + \sin x\right]_0^{\pi/4}$$

$$= -\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} + \cos 0 - \sin 0$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 - 0 = 1$$

17. दिया है– $\sqrt{a+x}.\frac{dy}{dx} + x = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{a+x}} = -\left(\frac{a+x-a}{\sqrt{a+x}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\sqrt{a+x} + \frac{a}{\sqrt{a+x}}$$

$$\Rightarrow \quad dy = -\sqrt{a+x}dx + \frac{a}{\sqrt{a+x}}dx$$

दोनों तरफ अवकलन करने पर हम पाते हैं

$$\int dy = -\int \sqrt{a+x}dx + \int \frac{a}{\sqrt{a+x}}dx$$

$$\Rightarrow \quad y = -\frac{2}{3}(a+x)^{3/2} + 2a(a+x)^{1/2} + C$$

$$\therefore \quad y = 2\sqrt{a+x}\left(\frac{2a}{3} - \frac{x}{3}\right) + C$$

18. $\frac{dy}{dx} = x - y \Rightarrow \frac{dy}{dx} + y = x$

$$\because \quad \text{I.F.} = e^{\int dx} = e^x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}.e^x + y.e^x = x.e^x$$

$$\frac{d(ye^x)}{dx} = xe^x \Rightarrow e^x.y = \int xe^x dx$$

$$\Rightarrow \quad e^x y = xe^x - e^x + C$$

$$\therefore \quad y = x - 1 + \frac{c}{e^x}$$

19. $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}, \quad \vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \hat{i}(4-6) - \hat{j}(12+2) + \hat{k}(-9-1)$$

$$= 2\hat{i} - 14\hat{j} - 10\hat{k}$$

20. चूँकि $\vec{a}-2\vec{b}+\vec{ac}, 2\vec{a}+3\vec{b}-4\vec{c}, -7\vec{b}+10\vec{c}$ समरेख है।

$$\therefore \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 1(30-28)-2(-20+21)$$

$$= 2-2=0$$

चूँकि इस बिंदु का determinant शून्य है।
अत: बिंदु समरेख हैं।

21. $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=2(\vec{a}\times\vec{b})$

बायाँ पक्ष $=(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})$

$$=(\vec{a}\times\vec{a})+(\vec{a}\times\vec{b})-(\vec{b}\times\vec{a})-(\vec{b}\times\vec{b})$$

$$=0+\vec{a}\times\vec{b}-\vec{b}\times\vec{a}-0=0+\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{b}$$

$$=2(\vec{a}\times\vec{b})=$$ दायाँ पक्ष सिद्ध हुआ।

22. दिया है– $x+2y+3z=6$ ...(i)
$3x-3y+z=1$ ...(ii)
Direction cosines of equation (i) and (ii) are respectively

$$\text{D.C.}_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}, \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}, \frac{3}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}$$

$$\text{D.C.}_2 = \frac{1}{\sqrt{3^2+(-3)^2+1^2}}, \frac{-1}{\sqrt{3^2+3^2+1^2}}, \frac{1}{\sqrt{3^2+3^2+1^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{19}}, \frac{-3}{\sqrt{19}}, \frac{1}{\sqrt{19}}$$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{14}}\times\frac{3}{\sqrt{19}}+\frac{2}{\sqrt{14}}\times\frac{(-3)}{\sqrt{19}}+\frac{3}{\sqrt{14}}\times\frac{1}{\sqrt{19}}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = 0 \qquad \therefore \theta = 30°$$

अत: दोनों तलों के बीच का कोण 90° है।

23. दिया हुआ है– $\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+3}{4}$ ...(i)
और समतल $x+y+4z=6$

माना कि $\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+3}{4}=\lambda$

$$\Rightarrow \quad x=2\lambda-1, y=3\lambda-2, z=4\lambda-3$$

$P(2\lambda-1, 3\lambda-2, 4\lambda-3)$
यह समतल (1) को अंतर्विष्ट करता है।

$$\therefore \quad 2\lambda-1+3\lambda-2+16\lambda-12=6$$

$$\Rightarrow \quad 21\lambda-15=6 \qquad \therefore \lambda=1$$

λ का मान रखने पर,

$$P(2.1-1, 3.1-2, 4.1-3)$$

$$= P(1, 1, 1)$$

24. यहाँ प्रतिदर्श समष्टि S = {HH, TH, HT, TT}, $n(S)=A$
जहाँ HH का अर्थ है कि दोनों सिक्कों का शीर्ष आता है, आदि।
तथा $A = \{HH, HT\}, n(A)=2$
$B = \{HT, TT\}, n(B)=2$
$A\cap B = \{HT\}, n(A\cap B)=1$

तो $P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{1}{4}$ तथा $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad P(A\cap B)=P(A)\,P(B)$$

अत: A तथा B स्वतंत्र हैं।

25. दिया है– $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{1}{4}$ और $P(A\cap B)=\frac{1}{5}$

तब $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1/5}{1/4}=\frac{4}{5}$

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1/5}{1/3}=\frac{3}{5}$$ **Ans.**

26. दिया है–रेखाएँ $L_1: \frac{11-x}{p}=\frac{3y-3}{2}=\frac{17-z}{5}$ ...(i)

और $L_2: \frac{-22}{3p}=\frac{2y-7}{27p}=\frac{z-100}{6/5}$ ...(ii)

समीकरण (i) से हम पाते हैं $\frac{x-11}{p}=\frac{y-1}{2/3}=\frac{z-17}{5}$ ...(a)

पुन: समीकरण (ii) से हम पाते हैं

$$\frac{x-22}{3p}=\frac{y-7/2}{27p/2}=\frac{z-100}{6/5}$$ ...(b)

समीकरण (a) और (b) का मान रखने पर,

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$$

समीकरण (a) से, $a_1=p, b_1=2/3, c_1=5$
समीकरण (b) से, $a_2=3p, b_2=27p/2, c_2=6/5$
अब, प्रश्नानुसार यदि दोनों रेखाएँ लंबवत् हैं तो

$$a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$$

$$\Rightarrow \quad p.3p+\frac{2}{3}.\frac{27p}{2}+5.\frac{6}{5}=0$$

$$\Rightarrow \quad 3p^2+9p+6=0$$

$$\Rightarrow \quad 3p^2+6p+3p+6=0$$

$$\Rightarrow \quad 3p(p+2)+3(p+2)=0$$

$$\Rightarrow \quad (p+2)(3p+3)=0$$

$$p=-2,-1$$

अत: p का मान $(-2, -1)$ है।

27. $(2\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k}).(2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})\times(\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k})$

$\because \quad (2\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k})\times(\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k})$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i}(2-1)-\hat{j}(4+1)+\hat{k}(-2-1)$$

$$= \hat{i}-5\hat{j}-3\hat{k}$$

अब, $(2\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k}).(\vec{i}-5\vec{j}-3\vec{k})$

$$= 2+15+3=20$$

28. दिया है, A = R = वास्तविक संख्याओं का समुच्चय तथा $R=\{(a, b): a \le b^3\}$

स्वतुल्य संबंध के लिए, हम जानते हैं कि $\frac{1}{2} \not\le \left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

A-ONE PRAKASHAN

$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \notin R$, अतः R, स्वतुल्य संबंध नहीं है।

सममित संबंध के लिए, चूँकि $1<2^3 \therefore (1,2) \in R$ लेकिन $2 \not< 1^3 \Rightarrow \therefore (2,1) \in R$ अतः R सममित संबंध नहीं है।

संक्रमक संबंध के लिए, चूँकि $3<\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{27}{8} \therefore \left(3,\frac{3}{2}\right) \in R$ तथा

$\frac{3}{2}<\left(\frac{6}{5}\right)^3=\frac{216}{125}$

$\therefore \quad \left(\frac{3}{2},\frac{6}{5}\right) \in R$ लेकिन $3>\left(\frac{6}{5}\right)^3$

$\therefore \left(3,\frac{6}{5}\right) \notin R$ अतः R, संक्रमक संबंध नहीं है। इसलिए R, स्वतुल्य संबंध, सममित संबंध तथा संक्रमक संबंध में से कोई नहीं है।

29. L.H.S. $=\cos\left[\tan^{-1}\left\{\sin(\cot^{-1}x)\right\}\right]$

माना $\cot^{-1}x=\theta \Rightarrow x=\cot\theta$

$\therefore \quad \operatorname{cosec}\theta=\sqrt{1+\cot^2\theta}=\sqrt{1+x^2}$

$\therefore \quad \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

अब L.H.S. $=\cos[\tan^{-1}(\sin\theta)]=\cos\left[\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right]$

फिर माना कि $\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\alpha \Rightarrow \tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$\therefore \quad \sec^2\alpha=1+\tan^2\alpha=1+\frac{1}{1+x^2}=\frac{x^2+2}{x^2+1}$

$\Rightarrow \quad \sec\alpha=\sqrt{\frac{x^2+2}{x^2+1}} \Rightarrow \cos\alpha=\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+2}}$

अब L.H.S. $=\cos\alpha=\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+2}}$

30. दिया आव्यूह है $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$

अब $A\times A=A^2=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$

$A^2=A\times A$

$=\begin{bmatrix}1\times1+2\times2+2\times2 & 2\times1+1\times2+2\times2 & 2\times1+2\times2+1\times2\\ 2\times1+1\times2+2\times2 & 2\times2+1\times1+2\times2 & 2\times2+2\times1+2\times1\\ 1\times2+2\times2+1\times2 & 2\times2+1\times2+2\times1 & 2\times2+2\times2+1\times1\end{bmatrix}$

$A^2=\begin{bmatrix}9&8&8\\8&9&8\\8&8&9\end{bmatrix}$ ...(i)

अब $4A=4\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix} \quad \therefore 4A=\begin{bmatrix}4&8&8\\8&4&8\\8&8&4\end{bmatrix}$ ...(ii)

जैसा कि हम जानते हैं $I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}; 5I=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{bmatrix}$ ...(iii)

चूँकि समीकरण (i), (ii) और (iii)

$=\begin{bmatrix}9&8&8\\8&9&8\\8&8&9\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}4&8&8\\8&4&8\\8&8&4\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}9&8&8\\8&9&8\\8&8&9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}9&8&8\\8&9&8\\8&8&9\end{bmatrix}=0$

अतः $A^2-5I-4A=0$ सिद्ध हुआ।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

31. माना कि आव्यूह $A=\begin{bmatrix}2&0&-1\\5&1&0\\0&1&3\end{bmatrix}$

अब $|A|=\begin{vmatrix}2&0&-1\\5&1&0\\0&1&3\end{vmatrix}=2(3-0)-0+(-1)(5-0)=6-5=1$

$\Rightarrow \quad |A| \neq 0$

अतः A invertible होगा। हम जानते हैं कि, $A^{-1}=\frac{\text{adj } A}{|A|}$

अब $C_{11}=3, C_{12}=-15, C_{13}=5$
$C_{21}=-1, C_{22}=6, C_{23}=-2$
$C_{31}=1, C_{32}=-5, C_{33}=2$

$\text{adj } A=\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}&C_{13}\\C_{21}&C_{22}&C_{23}\\C_{31}&C_{32}&C_{33}\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}C_{11}&C_{21}&C_{31}\\C_{12}&C_{22}&C_{32}\\C_{13}&C_{23}&C_{33}\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}3&-1&1\\-15&6&-5\\5&-2&2\end{bmatrix}$

$\therefore \quad A^{-1}=\frac{\begin{bmatrix}3&-1&1\\-15&6&-5\\5&-2&2\end{bmatrix}}{1}=\begin{bmatrix}3&-1&1\\-15&6&-5\\5&-2&2\end{bmatrix}$ **Ans.**

32. यदि $x^m \cdot y^n=(x+y)^{m+n}$ तब ज्ञात करें कि $\frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow x^m \cdot y^n=(x+y)^{m+n}$

दोनों तरफ log लेने पर, $\log(x^m \cdot y^n)=\log(x+y)^{m+n}$

$\Rightarrow m\log x+n\log y=(m+n)\log(x+y)$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$m\times\frac{1}{x}+n\times\frac{1}{y}\times\frac{dy}{dx}=(m+n)\times\frac{1}{x+y}\left(1+\frac{dy}{dx}\right)$

$$\Rightarrow \frac{m}{x}+\frac{n}{y}\times\frac{dy}{dx}=\frac{m+n}{x+y}+\frac{m+n}{x+y}\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left(\frac{n}{y}-\frac{m+n}{x+y}\right)=\frac{m+n}{x+y}-\frac{m}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left(\frac{nx+ny-my-ny}{y(x+y)}\right)=\frac{mx+nx-mx-my}{(x+y)x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\cdot\frac{(nx-my)}{y(x+y)}=\frac{(nx-my)}{(x+y)x} \quad \therefore \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$$

33. यहाँ $y=x-\sin x$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=1-\cos x \qquad ...(1)$$

अब उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ मान के लिए $\frac{dy}{dx}=0$

$\therefore \quad 1-\cos x=0; \quad \therefore \cos x=1; \quad \therefore x=2n\pi$

यदि $x=2n\pi-\epsilon$ तो (1) से,

$$\frac{dy}{dx}=1-\cos(2n\pi-\epsilon)=1-\cos\epsilon>0$$

यदि $x=2n\pi+\epsilon$ तो (1) से,

$$\frac{dy}{dx}=1-\cos(2n\pi+\epsilon)=1-\cos\epsilon>0$$

$\therefore$ दोनों स्थितियों में $\frac{dy}{dx}$ का एक ही चिह्न है।

$\therefore$ $x=2n\pi$ पर फलन को उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ मान नहीं है।

34. [यहाँ $\sec x$ का power even positive integer नहीं है तथा $\tan x$ का power even positive integer है अतः $\tan^2 x$ को $\sec^2 x-1$ में बदलकर $z=\tan x$ रखें।]

अब, $\int \tan^4 x\,dx=\int(\tan^2 x)^2dx=\int(\sec^2 x-1)^2dx$

$=\int(\sec^4 x-2\sec^2 x+1)dx$

$=\int\sec^4 x\,dx-2\int\sec^2 x\,dx+\int dx$

$=\int\sec^4 x\,dx-2\tan x+x \qquad ...(1)$

पुनः $=\int\sec^4 x\,dx=\tan x+\frac{\tan^3 x}{3}$ [उदाहरण (4) से]

$\therefore$ (1) से, $\int\tan^4 x\,dx=\tan x+\frac{\tan^3 x}{3}-2\tan x+x+c$

$$=\frac{\tan^3 x}{3}-\tan x+x+c.$$

35. मान लिया $I=\int_0^{\pi/2}\log\sin x\,dx \qquad ...(i)$

तब $I=\int_0^{\pi/2}\log\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx \qquad \because \int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(a-x)dx$

$=\int_0^{\pi/2}\log\cos x\,dx \qquad ...(ii)$

(i) + (ii) $\Rightarrow$ $2I=\int_0^{\pi/2}(\log\sin x+\log\cos x)dx$

$=\int_0^{\pi/2}\log(\sin x.\cos x)\int_0^{\pi/2}\log\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)dx$

$=\int_0^{\pi/2}\{\log\sin 2x-\log 2\}dx$

$=\int_0^{\pi/2}\log\sin 2x\,dx-\log 2\int_0^{\pi/2}dx \quad =I_1-\frac{\pi}{2}\log 2 \qquad ...(iii)$

अब हम $I_1=\int_0^{\pi/2}\log\sin 2x\,dx$ का मान ज्ञात करते हैं।

इसके लिए, मान लिया $2x=t$ जिससे कि $2dx=dt$

साथ ही, $(x=0\Rightarrow t=0)$ और $(x=\pi/2\Rightarrow t=\pi)$

$$\Rightarrow \quad I_1=\int_0^{\pi}\log\sin t.\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\log\sin t\,dt$$

यहाँ $\log\sin\left(2.\frac{\pi}{2}-t\right)=\log\sin t$

$$\therefore I_1=\frac{1}{2}.2\int_0^{\pi/2}\log\sin t\,dt$$

क्योंकि यदि $f(2a-x)=f(x)$ तब, $\int_0^{2a}f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx$

अतः $I_1=\int_0^{\pi/2}\log\sin t\,dt=\int_0^{\pi/2}\log\sin x\,dx=I$

$\therefore$ (i) से, $2I=I-\frac{\pi}{2}\log 2$

$\Rightarrow \quad I=-\frac{\pi}{2}\log 2$ अतः परिणाम।

36. यहाँ $\vec{a}+\vec{b}=(3\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k})+(7\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k})$

$=10\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

$\vec{a}-\vec{b}=(3\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k})-(7\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k})$

$=-4\vec{i}+7\vec{j}-11\vec{k}$

$\therefore (\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})=(10\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})\times(-4\vec{i}+7\vec{j}-11\vec{k})$

$=-40\vec{i}\times\vec{i}+70\vec{i}\times\vec{j}-110\vec{i}\times\vec{k}-4\vec{j}\times\vec{j}+7\vec{j}\times\vec{j}$

$-11\vec{j}\times\vec{k}-4\vec{k}\times\vec{i}+7\vec{k}\times\vec{j}-11\vec{k}\times\vec{k}$

$=-40\times\vec{0}+70\vec{k}+110\vec{j}+4\vec{k}+7\times\vec{0}-11\vec{i}-4\vec{j}-7\vec{i}-11\times\vec{0}$

$=-18\vec{i}+106\vec{j}+74\vec{k}$

साथ ही, $|(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})|=|-18\vec{i}+106\vec{j}+74\vec{k}|$

$=\sqrt{(-18)^2+(106)^2+(74)^2}=\sqrt{17036}$

37. चूँकि $x,y\geq 0$. अतः सुसंगत क्षेत्र प्रथम पाद में होगा।

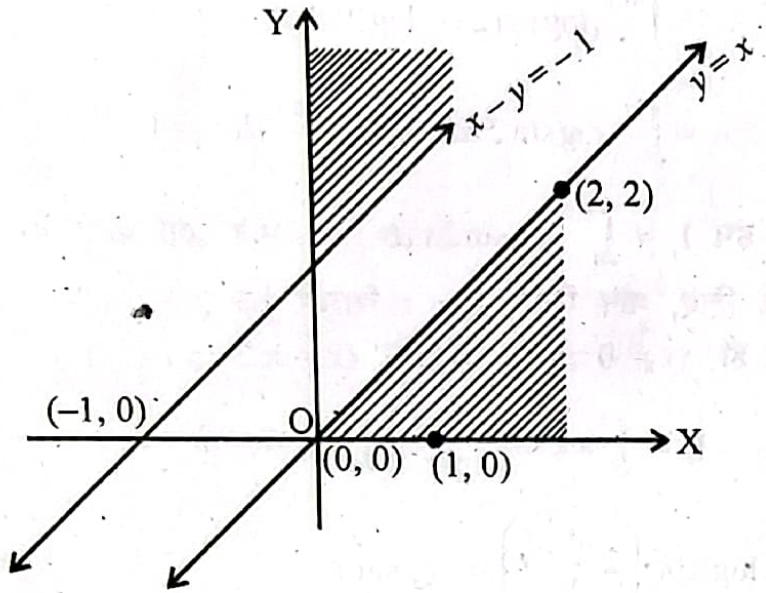
असमीकरणों (व्यवरोधों) के संगत समीकरण लेने पर,

$$x-y=-1,\ -x+y=0$$

या, $\frac{x}{-1}+\frac{y}{1}=1, y=x$

पहली रेखा $(-1,0)$ और $(0,1)$ से गुजरती है। दूसरी रेखा मूल बिंदु और $(2,2)$ से गुजरती है। इनके आलेख नीचे दिखाए गए हैं। $x=0, y=0$ क्रमशः y-अक्ष और x-अक्ष है।

A-ONE PRAKASHAN, PATNA



क्षेत्र $x-y \leq -1$, रेखा $x-y=-1$ के मूल बिंदु के विपरीत पार्श्व का क्षेत्र है, क्योंकि $(0, 0), x-y \leq -1$ को संतुष्ट नहीं करता है। जबकि क्षेत्र $-x+y \leq 0$, रेखा $y=x$ नीचे का क्षेत्र है। [अर्थात् (1, 0) के पार्श्व का क्षेत्र है, क्योंकि $(1, 0), -x+y \leq 0$ को संतुष्ट करता है।]

इन दोनों क्षेत्रों का उभयनिष्ठ कोई क्षेत्र नहीं है।

∴ सुसंगत क्षेत्र में एक भी बिंदु नहीं है।

अत: z का कोई अधिकतम मान नहीं होगा।

38. प्रतिदर्श समष्टि S = {HH, HT, TH, TT},

यादृच्छिक पर X = शीर्ष की संख्या

अत: 0, 1, 2 लेने पर

$$P(0) = P(TT) = \frac{1}{4};$$

$$P(I) = P(HT \text{ या } TH) = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

$$P(2) = P(HH) = \frac{1}{4}$$

उपर्युक्त संबंध के लिए सारणी बनाने पर,

X_i	0	1	2	
P_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	
P_iX_i	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sum P_iX_i = 1$
$P_iX_i^2$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\sum P_iX_i^2 = \frac{3}{2}$

माध्य (M) = $\sum P_iX_i = 1$,

प्रसरण (variance) $\sigma^2 = \sum P_iX_i^2 - M^2 = \frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$