MODEL PAPER – 2

● परीक्षार्थियों के लिये निर्देश MODEL PAPER – 1 के समान होगा।

खण्ड–अ (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

प्रश्न संख्या 1 से 100 तक के प्रत्येक प्रश्न के साथ चार विकल्प दिये गए हैं, जिनमें से एक सही है। अपने द्वारा चुने गए सही विकल्प को OMR शीट पर चिह्नित करें। किन्हीं 50 प्रश्नों का उत्तर दें। $50 \times 1 = 50$

1. निम्नलिखित में किसका प्रतिलोम फलन एकैक आच्छादक होता है ?
   (A) एकैक आच्छादन (B) एकैक अंत:क्षेपी
   (C) अनेकैक आच्छादक (D) अनेकैक अंत:क्षेपी
2. एक समुच्चय X में संबंध R तुल्यता संबंध होता है यदि R
   (A) स्वतुल्य हो (B) सममित हो
   (C) संक्रमक हो (D) इनमें सभी
3. समुच्चय $\{a, b, c, d\}$ से स्वयं पर सभी एकैक फलनों की संख्या है
   (A) 12 (B) 24
   (C) 36 (D) इनमें से कोई नहीं
4. यदि $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ तो $\tan(\tan^{-1} x) =$
   (A) $\tan x$ (B) $\cot x$ (C) x (D) $-x$
5. $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x =$
   (A) 0 (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) π
6. यदि $x > 0, y > 0, xy < 1$ तो
   (A) $\tan^{-1}(x + y)$ (B) $\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$
   (C) $\tan^{-1}(x - y)$ (D) $\sin^{-1}(x + y)$
7. यदि $-1 < x < 1$ तो $2\tan^{-1} x =$
   (A) $\tan^{-1} 2x$ (B) $\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$
   (C) $\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$ (D) $\cot^{-1}\frac{2}{x}$
8. $2\begin{bmatrix} x & y \\ l & m \end{bmatrix} =$
   (A) $2\begin{bmatrix} 2x & 2y \\ l & m \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} x & y \\ 2l & 2m \end{bmatrix}$
   (C) $\begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2l & 2m \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 2+x & 2+y \\ 2+1 & 2+m \end{bmatrix}$
9. $2\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} =$
   (A) $\begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 15 & 20 \end{bmatrix}$
   (C) $\begin{bmatrix} 2 & 15 \\ 15 & 4 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 15 & 60 \end{bmatrix}$
10. यदि $A = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}$
    (A) $\begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$
    (C) $\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} -5 & -5 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}$
11. $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$
    (A) 0 (B) 1 (C) – 1 (D) 2c

12. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} =$

(A) $\begin{bmatrix} ap & bq \\ cr & ds \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} a+p & b+q \\ c+r & d+s \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} a/p & b/q \\ c/r & d/s \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} a+p & b+q \\ c-r & d-s \end{bmatrix}$

13. किसी अव्युत्क्रमणीय आव्यूह A के लिए

(A) $|A|=0$ (B) $|A|\neq 0$ (C) $|A|=1$ (D) $|A|=2$

14. यदि I एक 2×2 क्रम वाला एकांक आव्यूह हो तो $I^3=$

(A) $3I^2$ (B) $3+I$ (C) $3I$ (D) I

15. यदि $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$ तो $2A-B=$

(A) $[0]$ (B) $[0 \quad 0]$ (C) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (D) $[3]$

16. यदि दो आव्यूह A और B के क्रम 2×4 तथा 3×2, क्रमशः हो तो AB का क्रम है

(A) 2×2 (B) 4×3

(C) 2×3 (D) AB ज्ञात करना संभव नहीं है

17. $\frac{d}{dx}(\tan x)=$

(A) $3\cos^3 x$ (B) $\sin^2 x$

(C) $\sec x \tan x$ (D) $\cos x$

18. $\frac{d}{dx}(\sin^2 x)=$

(A) $3\cos^3 x$ (B) $3\sin^2 x \cos x$

(C) $3\sin^2 x$ (D) $\cos^3 x$

19. $\frac{d}{dx}[3(\sin^2 x+\cos^2 x)]=$

(A) 3 (B) 1

(C) 0 (D) $6\sin x \cos x$

20. $\frac{d}{dx}(e^{4x})=$

(A) e^{4x} (B) e^x (C) $\frac{e^{4x}}{4}$ (D) $4e^{4x}$

21. $\frac{d}{dx}(x^5)=$

(A) $5x^5$ (B) $5x^4$ (C) $\frac{x^6}{6}$ (D) $\frac{x^4}{4}$

22. $\frac{d}{dx}[\log(x^3)]=$

(A) $\frac{1}{x^3}$ (B) $\frac{3}{x}$ (C) $3x$ (D) $\frac{3}{x^3}$

23. यदि $x=\cos\theta, y=\sin\theta$ तो $\frac{dy}{dx}=$

(A) $\tan\theta$ (B) $\sec^2\theta$ (C) $\cot\theta$ (D) $-\cot\theta$

24. $\frac{d}{dx}(x^{1/3})=$

(A) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (B) $\frac{1}{3}x^{-2/3}$ (C) $x^{-2/3}$ (D) $\frac{1}{3}x^{2/3}$

25. $\int \sin 2x\, dx=$

(A) $k+2\cos 2x$ (B) $\frac{\cos 2x}{2}+k$

(C) $k-\frac{\cos^2 2x}{2}$ (D) $k-\frac{\cos 2x}{3}$

26. $\int x^4 dx=$

(A) $k=x^5$ (B) $k+\frac{x^4}{5}$ (C) $k+\frac{x^5}{5}$ (D) $k+\frac{x^5}{4}$

27. $\int e^{3x} dx=$

(A) $e^{3x}+k$ (B) $k+3e^{3x}$ (C) $\frac{e^{3x}}{3}+k$ (D) $\frac{e^{3x}}{4}+k$

28. $\int \frac{3}{x} dx=$

(A) $k+3x^2$ (B) $k-\frac{3}{x^2}$ (C) $3x+k$ (D) $k+3\log|x|$

29. $\int 3dx=$

(A) $3+k$ (B) $x+k$ (C) $3x+k$ (D) $3k$

30. $\int \sqrt{x} dx=$

(A) $\frac{2}{3}\sqrt{x}+k$ (B) $\frac{2}{3}x+k$ (C) $\frac{2}{3}x^{3/2}+k$ (D) $\frac{2}{3}x^2+k$

31. $\int_0^{\pi/2} \sin x\, dx=$

(A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) $\frac{\pi}{2}$

32. $\int_0^1 e^x dx=$

(A) e (B) $e+1$ (C) $e-1$ (D) $2e$

33. समीकरण $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}$ का हल है

(A) $x=ky$ (B) $xy=k$ (C) $x+y=k$ (D) $x-y=k$

34. अवकल समीकरण $\cos x\, dx+\cos y\, dy=0$ का हल है

(A) $\sin x+\cos y=k$ (B) $\sin x+\sin y=k$

(C) $\cos x+\cos y=k$ (D) इनमें से कोई नहीं

35. $e^x dx+e^y dy=0$ का हल है

(A) $e^x+e^y=k$ (B) $e^x-e^y=k$

(C) $e^{x+y}=k$ (D) इनमें से कोई नहीं

36. रैखिक समीकरण $\frac{dy}{dx}+xy=x^3$ का समाकलन गुणक

(A) e^x (B) $e^{\frac{x^2}{2}}$

(C) x (D) इनमें से कोई नहीं

37. $\int \log x\, dx=$

(A) $x\log x-x+k$ (B) $x\log x+x+k$

(C) $\frac{1}{x}+k$ (D) $\frac{1}{x}(\log x^2)+k$

नाहं स्त्री-धन लिप्सामि सर्वाधिक प्रश्न लेकर आया हूँ कोचिंग
A-ONE PRAKASHAN

38. $\int \frac{dx}{1+x^2} =$

(A) $\tan^{-1}x + k$ (B) $\sin^{-1}x + k$ (C) $\cos^{-1}x + k$ (D) $\cot^{-1}x + k$

39. $|\vec{i}| =$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

40. $\vec{i} \cdot \vec{i} =$

(A) 0 (B) 1 (C) $\vec{j}$ (D) $\vec{k}$

41. $\vec{i} \times \vec{i} =$

(A) $\vec{i}$ (B) $\vec{0}$ (C) $\vec{j}$ (D) $\vec{k}$

42. यदि O मूल बिंदु हो तथा बिंदु A के स्थिति सदिश (2, 3, 4) हों तो $\vec{OA} =$

(A) $-2\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$ (B) $-2\vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k}$

(C) $2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$ (D) $2\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}$

43. $|\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}| =$

(A) 14 (B) 6 (C) 1 (D) $\sqrt{14}$

44. $(2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}).(3\vec{i}-4\vec{j}+5\vec{k}) =$

(A) 14 (B) −14 (C) 26 (D) −26

45. y-अक्ष के दिक् कोज्याएँ हैं

(A) 0, 0, 0 (B) 1, 0, 0 (C) 0, 1, 0 (D) 0, 0, 1

46. l_1, m_1, n_1, और l_2, m_2, n_2 दिक् कोज्याएँ वाली दो सरल रेखाओं के समांतर होने के लिए शर्त है

(A) $l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$ (B) $\frac{l_1}{l_2}+\frac{m_1}{m_2}+\frac{n_1}{n_2}=0$

(C) $\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$ (D) इनमें से कोई नहीं

47. समतल $x + 2y + 3z + 5 = 0$ के समांतर एक तल का समीकरण है

(A) $x = 2y + 3y + 1 = 0$ (B) $x - 2y + 3z + 5 = 0$

(C) $x + 2y - 3z + 1 = 0$ (D) इनमें से कोई नहीं

48. yz-तल के समांतर तल का समीकरण है

(A) $x = k$ (B) $y = k$

(C) $z = k$ (D) इनमें से कोई नहीं

49. यदि A और B दो स्वेच्छ घटनाएँ हो जहाँ $A \neq \varphi$ तो $P(A \cap B) =$

(A) P(A).P(B / A) (B) P(A) + P (B / A)

(C) P(A) – P(B / A) (D) इनमें से कोई नहीं

50. एक linear programming problem में जिस फलन का अधिकतम या न्यूनतम मान निकालना हो उसे कहते हैं

(A) उद्देश्य फलन (B) प्रतिबंध

(C) 'A' और 'B' दोनों (D) इनमें से कोई नहीं

51. वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R में एक सम्बन्ध इस प्रकार परिभाषित है : $x - y$ यदि और केवल यदि $x, y = 0$ तो सम्बन्ध

(A) स्वतुल्य है, परन्तु सममित नहीं है

(B) सममित है, परन्तु संक्रमक नहीं है

(C) संक्रमक है, परन्तु स्वतुल्य नहीं है

(D) एक तुल्यता सम्बन्ध है

52. मान लीजिए $A = \{a, b, c\}$ एवं $B = \{e, f\}$ है तो निम्नलिखित उपसमुच्चयों में कौन A से B में फलन है ?

(A) $\{(a, e), (e, f), (b, e), (b, f)\}$ (B) $\{\{a, e), (b, f)\}$

(C) $\{(a, f), (b, e), (c, e)\}$ (D) इनमें से कोई नहीं

53. 3×3 कोटि के ऐसे आव्यूहों की कुल संख्या कितनी होगी जिनकी प्रत्येक प्रविष्टि 0 या 1 है ?

(A) 27 (B) 18 (C) 81 (D) 512

54. यदि $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{bmatrix}$ इस प्रकार है कि $A^2 = I$, तो

(A) $1 + \alpha^2 + \beta\gamma = 0$ (B) $I - \alpha^2 + \beta\gamma = 0$

(C) $1 - \alpha^2 - \beta\gamma = 0$ (D) $1 + \alpha^2 - \beta\gamma = 0$

55. वक्र $y = x^4 - x + 1$ की स्पर्श रेखा की प्रवणता, उस बिन्दु पर क्या होगा जिसका x निर्देशांक 2 है

(A) 11 (B) 21 (C) 31 (D) 41

56. वक्र $x = t^2 + 3t - 8, y = 2t^2 - 2t - 5$ के बिन्दु (2, – 1) पर स्पर्श रेखा का ढाल है

(A) $\frac{7}{6}$ (B) $\frac{-6}{7}$ (C) $\frac{22}{7}$ (D) $\frac{6}{7}$

57. वक्र $y = x^2$ रेखा, $x = 1, x = 2$ और x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है

(A) $\frac{7}{3}$ (B) $\frac{8}{3}$ (C) $\frac{11}{3}$ (D) $\frac{13}{3}$

58. अवकल समीकरण $1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{d^2y}{dx^2}$ का घात है

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

59. तल $7x + 4y - 2z + 5 = 0$ अभिलंब के दिक्अनुपात है

(A) 7, 4, 5 (B) 7, 4, –2 (C) 7; 4, 2 (D) 0, 0, 0

60. यदि तल $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ और तल $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ परस्पर लंब हैं, तो

(A) $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ (B) $\frac{a_1}{a_2}+\frac{b_1}{b_2}+\frac{c_1}{c_2}=0$

(C) $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$ (D) $a_1^2a_2^2 + b_1^2 + c_1^2ca_2^2 = 0$

61. प्रथम 6 धन पूर्णांकों को अवयव होते हुए असमान अवयव वाले कुल कितने अलग-अलग आव्यूह बना सकते हैं ?

(A) 2880 (B) 1440 (C) 720 (D) 4

62. संख्याओं के समुच्चय $A = [1, 2, 3, 4, 5, 6]$ से दो संख्याओं को एक के बाद एक चुना जाता है तब 4 से कम मान वाली दो संख्याओं को चुनने की प्रायिकता

(A) 14/15 (B) 1/15 (C) 1/5 (D) 8/5

63. भारत का वेस्टइंडीज के विरुद्ध टेस्ट मैच जीतने की प्रायिकता 1/2 है। तीसरे मैंच को द्वितीय विज़ेता होने की क्या प्रायिकता है ?

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$

64. प्रथम 100 प्राकृत संख्याओं में से तीन भिन्न संख्याओं का चुनाव किया जाता है। सभी तीन संख्याओं की 2 और 3 से विभाजित होने की प्रायिकता है

(A) $\frac{9}{25}$ (B) $\frac{4}{35}$ (C) $\frac{4}{55}$ (D) $\frac{4}{1255}$

65. A के सच बोलने की प्रायिकता 4/5 है जबकि B के लिए 3/4 है। जब वे एक तथ्य पर बोलते हैं तो विरोधाभास हो तो की प्रायिकता है

(A) $\frac{7}{20}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{3}{20}$ (D) $\frac{4}{5}$

66. घटनाएँ A, B, C परस्पर अपवर्जी इस प्रकार है कि $P(A)=\frac{3x+1}{3}$,

$P(B)=\frac{1-x}{4}$ और $P(C)=\frac{1-2x}{2}$, x

(A) $\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$ (B) $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$ (C) $\left[1,3,\frac{13}{3}\right]$ (D) [0, 1]

67. फलन का प्रांत $f(x)=\frac{3}{4-x^2}+\log_{10}(x^3-x)$

(A) (1,2) (B) $(-1,0)\cup(1,2)$
(C) $(1,2)\cup(2,\infty)$ (D) $(-1,0)\cup(1,2)\cup(2,\infty)$

68. फलन $y=f(x)$ का ग्राफ रेखा $x=2$ के सममित हो, तब

(A) $f(x)=f(-x)$ (B) $f(2+x)=f(2-x)$
(C) $f(x+2)=f(x-2)$ (D) $f(x)=-f(-x)$

69. $f(x)=\sqrt{\sin^{-1}2x+\frac{\pi}{8}}$ का प्रांत है

(A) $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$ (B) $\left[\frac{-1}{4},\frac{1}{2}\right]$ (C) $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right]$ (D) $\left[\frac{-1}{4},\frac{1}{3}\right]$

70. $f(x)=a\sin kx+b\cos kx$ का आवर्त्त काल

(A) $\frac{2\pi}{k}$ (B) $\frac{2\pi}{|k|}$ (C) $\frac{\pi}{|k|}$ (D) कोई नहीं

71. $\tan^{-1}x=$

(A) $\cot^{-1}x$ (B) $\frac{1}{\cot^{-1}x}$ (C) $\cot^{-1}\frac{1}{x}$ (D) $-\cot^{-1}x$

72. $\sin^{-1}(1-x)-2\sin^{-1}x=\frac{\pi}{2}$ तो $x=$

(A) $0,\frac{1}{2}$ (B) $1,\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 0

73. $2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=$

(A) $\tan^{-1}\frac{44}{29}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) 0 (D) $\frac{\pi}{4}$

74. $\sin\left\{\frac{\pi}{3}-\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}$ का मान है

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) 1

75. एक मैट्रिक्स $A=[a_{ij}]_{mn}$ सममित है यदि

(A $a_{ij}=0$ (B) $a_{ij}=-a_{ij}$ (C) $a_{ij}=a_{ij}$ (D) $a_{ij}=1$

76. $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ तब

(A) $A^{-1}=\begin{bmatrix}3/5 & 1/5\\ 2/5 & 1/5\end{bmatrix}$ (B) $|A|=+0$

(C) $|A|=5$ (D) $A^2=A$

77. $\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम है

(A) $\begin{bmatrix}-\cos\theta & -\sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ (D) कोई नहीं

78. यदि त्रिभुज का क्षेत्रफल 35 वर्ग इकाई है तथा उसका नियामक (2, –6), (5, 4) तथा $(k, 4)$ है, तब k का मान है

(A) 12 (B) 12, –2 (C) –12, –2 (D) –2

79. यदि $A+B+C=\pi$ तब $\begin{vmatrix}\sin(A+B+C) & \sin(B+C) & \cos C\\ -\sin A & 0 & \tan A\\ \cos(A+B) & \tan(B+C) & 0\end{vmatrix}$

का मान है

(A) 0 (B) 1
(C) $2\sin B\tan A\cos C$ (D) कोई नहीं

80. माना $A=\begin{vmatrix}1 & \sin\theta & 1\\ -\sin\theta & 1 & \sin\theta\\ -1 & -\sin\theta & 1\end{vmatrix}$ $0\le\theta\le2\pi$ तब

(A) $|A|=0$ (B) $|A|\in(2,\infty)$
(C) $|A|\in(2,4)$ (D) $|A|\in[2,4]$

81. $\begin{vmatrix}a-b & b-c & c-a\\ b-c & c-a & a-b\\ c-a & a-b & b-c\end{vmatrix}=?$

(A) 0 (B) $(c-b)(b-c)(c-a)$
(C) $a^2+b^2+c^2$ (D) कोई नहीं

82. यदि $x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ तथा $y=\frac{2t}{1+t^2}$ तब $\frac{dy}{dx}=$

(A) $-\frac{y}{x}$ (B) $\frac{y}{x}$ (C) $-\frac{x}{y}$ (D) $\frac{x}{y}$

83. $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ का $\sin^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ के सापेक्ष अवकल गुणांक है

(A) –1 (B) 1 (C) 2 (D) $\frac{1}{2}$

84. यदि $x=a(\cos\theta+\theta\sin\theta)$, $y=a(\sin\theta-\cos\theta)$, तब $\frac{d^2y}{dx^2}=$

(A) $\frac{\sec^3\theta}{a\theta}$ (B) $\frac{\sec^2\theta}{\theta}$ (C) $a\theta\cos^3\theta$ (D) $\frac{\sec^2\theta}{dx^2}$

85. $\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=$

(A) $\frac{1}{x}x^{\frac{1}{3}}+2x^{\frac{1}{2}}+c$ (B) $\frac{2}{3}x^{2/3}+\frac{1}{2}x^2+c$

(C) $\frac{2}{3}x^{3/2}+2x^{1/2}+c$ (D) $\frac{3}{2}x^{3/2}+\frac{1}{2}x^{1/2}+c$

86. यदि $\frac{d}{dx}\{f(x)\}=4x^3-\frac{3}{x^4}$ और $f(2)=0$ है, तो $f(x)=$

(A) $x^4+\frac{1}{x^3}-\frac{129}{8}$ (B) $x^3+\frac{1}{x^4}+\frac{129}{8}$

(C) $x^4+\frac{1}{x^3}+\frac{129}{8}$ (D) $x^3+\frac{1}{x^4}-\frac{129}{8}$

A ONE PRAKASHAN

87. $\int \frac{10x^9 + 10^x \log_e 10}{x^{10} + 10^x} dx$ बराबर है

(A) $10^x - x^{10} + c$ (B) $10^x + x^{10} + c$

(C) $(10^x - x^{10}) + c$ (D) $\log(10^x + x^{10}) + c$

88. $\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$ बराबर है

(A) $\tan x + \cot x - c$ (B) $\tan x + \text{cosec}\, x + c$

(C) $\tan x + \cot x + c$ (D) $\tan x + \sec x + c$

89. अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + x^3\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = x^4$ की कोटि है

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

90. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + Py = Q$, जहाँ P तो Q, x के फलन हैं, का समाकलन गुणांक है

(A) $\int e^P dx$ (B) $e^{\int P dx}$ (C) $e^{-\int P dx}$ (D) कोई नहीं

91. अवकल समीकरण $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + 9y = \sin x$ की कोटि है

(A) 3 (B) 4 (C) 2 (D) कोई नहीं

92. $\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}$ एकतलीय होंगे, यदि

(A) $(\vec{a}.\vec{b})\vec{c} = 0$ (B) $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = 0$

(C) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ (D) $\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c}) = 0$

93. $4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ एवं $2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$ पर लंब इकाई सदिश है

(A) $\frac{1}{3}(\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k})$ (B) $\frac{1}{3}(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$

(C) $\frac{1}{3}(2\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$ (D) $\frac{1}{3}(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$

94. यदि $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}| = 1$ तो $|\vec{a} - \vec{b}|$ बराबर है

(A) 1 (B) $\sqrt{3}$ (C) 0 (D) कोई नहीं

95. रेखा $6x = 3y = 2z$ और $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-3}{-6}$ हैं

(A) समांतर (B) असममित (C) प्रतिच्छेदित (D) Coincident

96. The equation of y–axis is are

(A) $x = 0, y = 0$ (B) $x = 0, z = 0$

(C) $y = 0, z = 0$ (D) कोई नहीं

97. The reflection of the point $(2, -1, 3)$ in the plane $3x - 2y - z = 9$ is

(A) $\left(\frac{26}{7}, \frac{15}{7}, \frac{17}{7}\right)$ (B) $\left(\frac{26}{7}, \frac{-15}{7}, \frac{17}{7}\right)$

(C) $\left(\frac{15}{7}, \frac{26}{7}, \frac{-17}{7}\right)$ (D) $\left(\frac{26}{7}, \frac{17}{7}, -\frac{15}{7}\right)$

98. सुसंगत क्षेत्र बिन्दुओं का समुच्चय है जो संतुष्ट करता है

(A) उद्देश्य फलन को (B) कुल व्यवरोध को

(C) सभी व्यवरोध को (D) कोई नहीं

99. न्यूनतम कीजिए $z = x + y$ जबकि $3x + 2y \le 12, x + 3y \ge 11$ एवं $x \ge 0, y \ge 0$ हो तो x और y के मान हैं

(A) $\frac{18}{7}, \frac{2}{7}$ (B) $\frac{7}{2}, \frac{3}{2}$ (C) $\frac{3}{2}, \frac{15}{4}$ (D) कोई नहीं

100. $z = 6x_1 - 2x_2$ के अधिकतम मान के लिए, जबकि $2x_1 - x_2 \le 2, x_1 \le 3$ एवं $x_1, x_2 \ge 0$ हो तो x_1 और x_2 का मान ज्ञात करें

(A) 3, 4 (B) 2, 3 (C) 1, 2 (D) कोई नहीं

खण्ड–ब (गैर-वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न संख्या 1 से 30 लघु उत्तरीय हैं। किन्हीं 15 प्रश्नों के उत्तर दें। प्रत्येक के लिए 2 अंक निर्धारित है। $15 \times 2 = 30$

1. फलन $f: R \to R$ को एकैक या अनेकैक के लिए जाँचे जब $f(x) = |x|, x \in R$ है।
2. सिद्ध करें कि (Prove that)

$$2\tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{4} = \tan^{-1}\frac{32}{43}$$

3. x के लिए हल करें–

$$\cot^{-1} x + \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\pi}{4}$$

4. निम्न में x का मान ज्ञात करें :

$$\begin{bmatrix} 2x-y & 5 \\ 3 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

5. मान ज्ञात करें–

$$\begin{vmatrix} 16 & 9 & 7 \\ 23 & 16 & 7 \\ 32 & 19 & 13 \end{vmatrix}$$

6. x का मान ज्ञात करें जब $\begin{vmatrix} x & 4 \\ 2 & 2x \end{vmatrix} = 0$

7. यदि $A = \begin{vmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{vmatrix}$ तथा $B = [2\ 3\ 4]$ तो B' A' ज्ञात करें।

8. यदि $x + y = \sin(y + x)$ तो $\frac{dx}{dy}$ ज्ञात करें।

9. यदि $y - \log(x^2\sqrt{x^2+1}$ तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करें।

10. यदि $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$ तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करें।

11. समाकलन करें–$f(\sin x + \cos x)^2\, dx$

12. मान निकालें– $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sin x}$

13. मान निकालें– $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{\sin x + \cos x}$

14. हल करें $\frac{dy}{dx} - y\tan x = -y\sec^2 x$

15. समाकलन करें : $\int x^2 e^x dx$.

16. $5\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ और $3\vec{i} - 4\vec{j} + 7\vec{k}$ का अदिश गुणनफल ज्ञात करें।

17. यदि $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$ और $\vec{b} = 7\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}$ तो $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})$ ज्ञात करें $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})$

18. दो सरल रेखाओं के बीच का न्यूनकोण ज्ञात करें जिनके दिक् अनुपात (1, 1, 0) और (2, 1, 2) हैं।

19. p के मान ज्ञात करें जिससे रेखाएँ $\frac{11-x}{p}=\frac{3y-3}{2}=\frac{17-z}{3p}$ एवं $\frac{x-22}{3p}=\frac{2y-7}{3p}=\frac{2y-7}{27p}=\frac{z-100}{6/5}$ परस्पर लंब हों।

20. सिद्ध करे कि दो तल $3x-4y+5z=0$ और $2x-y-2z=5$ परस्पर लम्ब है।

21. एक पासा के फेंकने में यदि सम संख्या आती हो तो उसके 2 से अधिक होने की क्या प्रायिकता है ?

22. एक व्यक्ति एक सिक्के को 3 बार उछालता है। ठीक एक शीर्ष आने की प्रायिकता ज्ञात करें।

23. यदि $y=\sin x+\cos x$ तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात करें।

24. $\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात करें।

25. यदि A और B दो घटनाएँ हो तथा $2P(A)=P(B)=\frac{16}{13}$ तथा $P(A/B)=\frac{1}{3}$ हो, तो $P(A\cup B)$ ज्ञात करें।

26. यदि $y=\sin\sqrt{\cos x}$, $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करें।

27. मान निकालें : $\int_0^1 x(1-x)^{99}\,dx$.

28. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 7\end{bmatrix}$ और $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ तो k का मान निकालें जबकि $A^2=8A+kI$.

29. फलन $f(x)$ का $x=a$ पर संतता जाँच करें, जहाँ

$$f(x)=\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}, x\neq 0$$
$$=\frac{b^2-a^2}{2}, x=0$$

30. $\theta=\frac{\pi}{4}$ पर वक्र $x=a\cos^3 x, y=a\sin^3 x$ के अभिलम्ब का ढाल ज्ञात करें।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न संख्या 31 से 38 दीर्घ उत्तरीय प्रश्न हैं। किन्हीं 4 प्रश्नों के उत्तर दें। प्रत्येक के लिए 5 अंक निर्धारित हैं। $4\times 5=20$

31. यदि $y=x^{x^x}$ तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करें।

32. सिद्ध करें कि $\theta=\frac{\pi}{3}$ पर $\sin\theta(1+\cos\theta)$ महत्तम है।

33. मान निकालें– $\int_0^{\pi}\frac{x}{1+\sin x}dx$

34. हल करें– $(x^2+y^2)\frac{dy}{dx}=2xy$

35. अधिकतमीकरण करें $z=60x+15y$
जबकि $x+y\leq 50, 3x+y\leq 90$ और $x,y\geq 0$

36. A, 75 प्रतिशत सत्य बोलता है तथा B, 80 प्रतिशत तो किसी एक ही तथ्य पर दोनों में विरोधाभास होने की क्या प्रतिशत है ?

37. रेखा $\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{4}$ और समतल $2x+y-3z+4=0$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

38. गुणनखंड निकालें– $\begin{vmatrix}(b+c)^2 & a^2 & a^2\\ b^2 & (c+a)^2 & b^2\\ c^2 & c^2 & (a+b)^2\end{vmatrix}$

उत्तर

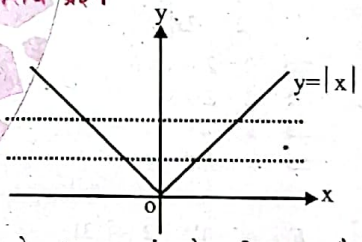
खण्ड–अ (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

1. (B)	2. (D)	3. (B)	4. (C)	5. (B)	6. (B)
7. (B)	8. (C)	9. (B)	10. (C)	11. (B)	12. (B)
13. (A)	14. (D)	15. (C)	16. (D)	17. (B)	18. (B)
19. (C)	20. (D)	21. (B)	22. (B)	23. (D)	24. (B)
25. (C)	26. (C)	27. (C)	28. (D)	29. (C)	30. (C)
31. (B)	32. (C)	33. (A)	34. (B)	35. (A)	36. (B)
37. (A)	38. (A)	39. (B)	40. (B)	41. (B)	42. (C)
43. (D)	44. (D)	45. (C)	46. (C)	47. (A)	48. (A)
49. (A)	50. (A)	51. (D)	52. (C)	53. (D)	54. (C)
55. (A)	56. (D)	57. (A)	58. (A)	59. (B)	60. (B)
61. (D)	62. (B)	63. (B)	64. (D)	65. (A)	66. (B)
67. (D)	68. (B)	69. (B)	70. (B)	71. (C)	72. (D)
73. (D)	74. (D)	75. (C)	76. (A,C)	77. (C)	78. (B)
79. (A)	80. (A)	81. (A)	82. (C)	83. (A)	84. (A)
85. (C)	86. (A)	87. (D)	88. (C)	89. (B)	90. (A)
91. (C)	92. (B)	93. (B)	94. (B)	95. (D)	96. (B)
97. (B)	98. (C)	99. (B)	100. (A)		

खण्ड–ब (गैर-वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

लघु उत्तरीय प्रश्न

1. यह निर्धारित करना कि क्या f, एकैकी है, हम horizontal line test का प्रयोग करते हैं।
यदि हम x-अक्ष के समान्तर एक horizontal line खींचे तो यह आलेख को दो बिन्दुओं पर काटता है। अतः f एकैकी नहीं है।



साथ ही f का परिसर $[0,\infty]$ है जो $\neq f$ का co-प्रांत जो R दिया हुआ है। अतः f आच्छादक नहीं है।
इस प्रकार f न तो एकैकी है और न आच्छादक है।

2. L.H.S. $=2\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{4}$

$$=2\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{4}\left[\frac{2\times\frac{1}{5}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right]=\tan^{-1}\frac{5}{12}$$

$$=\tan^{-1}\frac{5}{12}+\tan^{-1}\frac{1}{4}=\tan^{-1}\left[\frac{\frac{5}{12}+\frac{1}{4}}{1-\frac{5}{12}\times\frac{1}{4}}\right]$$

$$=\tan^{-1}\left(\frac{32}{48}\times\frac{48}{43}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{32}{43}\right)$$ **Proved.**

A-ONE PRAKASH

3. $\cot^{-1}x+\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\tan^{-1}1$

$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2x}}\right)=\tan^{-1}1$

$\Rightarrow \frac{2+x}{2x-1}=1 \Rightarrow 2+x=2x-1$

$\Rightarrow 1=x \Rightarrow x=1$ **Ans.**

4. $\begin{bmatrix}2x-y & 5\\ 3 & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 5\\ 3 & -2\end{bmatrix}$

$2x-y=6$ ...(i)

$y=-2$ ...(ii)

समीकरण (i) एवं (ii) से,

$2x-(-2)=6$

या, $2x+2=6$

या, $2x=4$

$\therefore x=2$ **Ans.**

5. $\Delta=\begin{vmatrix}16 & 9 & 7\\ 23 & 16 & 7\\ 32 & 19 & 13\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}7 & 9 & 7\\ 7 & 16 & 7\\ 13 & 19 & 13\end{vmatrix}$ [Apply C_1-C_2]

$=0$ **Ans.** [$C_1=C_3$]

6. $\begin{vmatrix}x & 4\\ 2 & 2x\end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow 2\times 2-8=0$

$\Rightarrow 2\times 2=8$

$\Rightarrow x^2=4$

$\Rightarrow x=\pm 2$

7. $B'=\begin{vmatrix}2\\ 4\\ 3\end{vmatrix}$, $A'=[2\ -4\ 3]$

$\therefore B'A'=\begin{bmatrix}4 & -8 & 6\\ 6 & -12 & 9\\ 8 & -16 & 12\end{bmatrix}$

8. $y+x=\sin(y+x)$

दोनों तरफ x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{dx}{dy}+1=\cos(y+x)\left\{\frac{dx}{dy}+1\right\}$

$\Rightarrow \frac{dx}{dy}+1=\cos(y+x)\frac{dy}{dx}+\cos(y+x)$

$\Rightarrow 1-\cos(y+x)\frac{dy}{dx}=\cos(y+x)-1$

$\Rightarrow \frac{dy}{dt}=-\frac{(1-\cos(y+x)}{(1-\cos(y+x)}=-1$ **Ans.**

9. $y=\log(x^2\sqrt{x^2+1})$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\left\{x^2\times\frac{1\times 2x}{2\sqrt{x^2+1}}+\sqrt{x^2+1}\times 2x\right\}$

$=\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\left\{\frac{x^3+2\times(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}\right\}$

$=\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\left\{\frac{3x^3+2x}{\sqrt{x^2+1}}\right\}$

$=\frac{x(3x^2+2)}{x^2(x^2+1)}=\frac{(3\times 2+2)}{x(x^2+1)}$ **Ans.**

10. $x=a\cos\theta,\ y=b\sin\theta$

x के सापेक्ष अवकलित करने पर

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{\frac{d(b\sin\theta)}{d\theta}}{\frac{d(a\cos\theta)}{d\theta}}=\frac{b\cos\theta}{-a\sin\theta}=\frac{-b}{a}\cot\theta$ **Ans.**

11. $I=\int(\sin x+\cos x)^2dx$

$I=\int\{\sin x+\cos x+2\sin x\cdot\cos\times dx\}dx$

$=\int\{1+\sin^2 x\}=\int dx+\int\sin^2\times dx$

$=x\frac{\cos^2 x}{2}+c$ **Ans.**

12. $\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\sin x}$

$=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$

$=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}$

$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sec^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)dx$

$=\frac{1}{2}\times(-2)\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\pi/2}$

$=-\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)-\tan\left(\frac{\pi}{4}-0\right)\right]$

$=-[0-1]=1$ **Ans.**

13. मान लिया $I=\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$

अब $\sin x=l(\sin x+\cos x)+m\frac{d}{dx}(\sin x+\cos x)+n$

$=l(\sin x+\cos x)+m(\cos x-\sin x)+n$

$\therefore\ l-m=1,\ l+m=0,\ n=0$

हल करने पर, $l=\frac{1}{2}, m=-\frac{1}{2}, n=0$

$\therefore \quad I = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x)} dx$

$= l\int dx + m\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx$

$= lx + m\log(\sin x + \cos)$

$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\log(\sin x + \cos x)$

$\therefore$ अभीष्ट मान $= \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\log(\sin x + \cos x\right]_0^{\pi/2}$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log\left(\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}\right) - 0 + \frac{1}{2}\log 1$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 1 + \frac{1}{2}\log 1 = \frac{\pi}{4}.$

14. $\frac{dy}{dx} - y\tan x = -y\sec^2 x$

$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = y(\tan x = -y\sec^2 x)$

$\Rightarrow \quad \int\frac{dy}{y} = \int(\tan x - \sec^2 x)dx$

$\Rightarrow \quad lny = lnsecx - \tan x + C$

15. $I = \int \frac{x^2}{u}\frac{e^x}{v} dx$

$I = x^2e^x - 2\int 2x\, exdx$

$= x^2e^x - 2\int \frac{x}{u}\frac{ex}{v}dx$

$= x^2e^x - 2[xex - \int 1\cdot exd]$

$= x^2e^x - 2xex + ex$

$= ex(x^2 - 2x + 1)$

$= ex(x-1)^2$ **Ans.**

16. $\vec{a} = \vec{5i} + \vec{j} - \vec{3k}, \vec{b} = \vec{3i} - \vec{4j} + \vec{7k}$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = (\vec{5i} + \vec{i} - \vec{3k})\cdot(\vec{3i} - \vec{4j} + \vec{7k})$

$= 15 - 4 - 21 = 15 - 25 = -10$ **Ans.**

17. $\vec{a} = \vec{3i} + \vec{4j} - \vec{5k}, \vec{b} = \vec{5i} - \vec{3j} + \vec{6k}$

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{10i} + \vec{j} + \vec{k}$

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{4i} + \vec{7j} + \vec{k}$

$\therefore \quad (\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 10 & 1 & 1 \\ -4 & 7 & 11 \end{vmatrix}$

$= \vec{a}(-11-7) - \vec{i}(-110+4) \times \vec{k}(70+4)$

$= \vec{17i} + \vec{106j} + \vec{74k}$ **Ans.**

18. Direction ratio (1, 1, 0) और (2, 1, 2) है।

यहाँ $a_1 = 1 \mid a_2 = 2$
$b_1 = 1 \mid b_2 = 1$
$c_1 = 1 \mid c_2 = 2$

$\therefore$ दो रेखाओं के बीच का न्यूनकोण होगा–

$\cos\theta = \pm\frac{(a_1b_2 + b_1b_2 + c_1c_2)}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$

$= \pm\frac{(2+1+0)}{\sqrt{2}\sqrt{a}} = \pm\frac{3}{\sqrt{2}\times 3} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \therefore \theta = 45°$ **Ans.**

19. रेखाओं का समीकरण इस प्रकार लिखा जा सकता है–

$\frac{x-11}{-p} = \frac{y-1}{\frac{2}{3}} = \frac{7-17}{-5}$

और $\frac{x-22}{3p} = \frac{y-\frac{7}{2}}{\frac{27}{2}p} = \frac{7-17}{\frac{6}{5}}$

यहाँ $a_1 = p \qquad a_2 = 3p$

$b_1 = \frac{2}{3} \qquad b_2 = \frac{27}{2}p$

$c_1 = -5 \qquad c_2 = \frac{6}{5}$

यदि दोनों रेखाएँ लम्ब हों, तो

$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

या, $-3p^2 + 9p - 6 = 0$

$p^2 - 3p + 2 = 0$

$\therefore \quad p = 1, 2$ **Ans.**

20. समतलों का समीकरण है–

$3x - 4y + 57 = 0$

$2x - y - 27 = 5$

यहाँ $a_1 = 3 - a_2 = 2$

$b_1 = -4b_2 = -1$

$c_1 = 5c_2 = -2$

यदि दोनों समतल परस्पर लम्ब हैं, तब $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

$= (3\times 2 + (-4)(-1) + 5(-2)$

$= 6 + 4 - 10 = 10 - 10 = 0$

अतः समतल परस्पर लम्ब हैं।

21. $n(S) = 6$

$n(E) = 2$

$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ **Ans.**

22. $n(S) = 2^3$

$n(E) = 1 \times 2^2$

$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{22}{23} = \frac{1}{2}$

23. $y = \sin x + \cos x$

$\frac{dy}{dx} = \cos x - \sin x$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x - \cos x$

$= -(\sin x + \cos x)$

A-ONE PRAKASHAN

24. $\Delta = \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$ $[R_1 \to R_1 - R_2, R_2 \to R_2 - R_3]$

$$= abc \begin{vmatrix} 1 & a-b & a^2-b^2 \\ 1 & b-c & b^2-c^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= abc(a-b)(b-c) \begin{vmatrix} 0 & 1 & a+b \\ 0 & 1 & b+c \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

$= abc\,(a-b)\,(b-c)\,\{b+c-a-b\}$

$= abc\,(a-b)\,(b-c)\,(b-a)$ **Ans.**

25. $P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

या, $\frac{1}{3} = \frac{P(A \cap B)}{\frac{6}{13}}$ $\therefore$ $P(A \cap B) = \frac{2}{13}$

अब $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{3}{13} + \frac{6}{13} - \frac{2}{13} = \frac{1}{13} + \frac{6}{13} = \frac{7}{13}$ **Ans.**

26. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin\sqrt{\cos x})$

$$= \frac{d}{d\sqrt{\cos x}} \sin\sqrt{\cos x} \cdot \frac{d}{d\cos x}\sqrt{\cos x} \cdot \frac{d}{dx}(\cos x)$$

$$= \cos\sqrt{\cos x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\cos x}} \cdot (-\sin x) = -\frac{\sin x \cos\sqrt{\cos x}}{2\sqrt{\cos x}}$$

27. दिया है, $I = \int_0^1 x(1-x)^{99}\,dx$

जैसा कि हम जानते हैं, $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$

अत: $I = \int_0^1 (1-x)\,\{1-(1-x)\}^{99}\,dx = \int_0^1 (1-x)(1-1+x)^{99}\,dx$

$$= \int_0^1 (1-x)(x)^{99}\,dx = \int_0^1 (x^{99} - x^{100})\,dx$$

$$= \int_0^1 (x)^{99}\,dx - \int_0^1 (x)^{99}\,dx = \left[\frac{x^{100}}{100}\right]_0^1 = \left[\frac{x^{101}}{101}\right]_0^1$$

$$= \left[\frac{1^{100}-0}{100}\right] - \left[\frac{1^{101}-0}{101}\right] = \frac{1}{100} - \frac{1}{101} = \frac{1}{10100}$$

28. हमें पता है $A^2 = A.A$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 0+0 \\ -1-7 & 0+49 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -8 & 49 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $A^2 - 8A$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -8 & 49 \end{bmatrix} - 8\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -8 & 49 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 8 & -56 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-8 & 0+0 \\ -8+8 & 49-56 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} = -7\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -7I$$

इस प्रकार तुलना करने पर $R = -7$

29. बायाँ पक्ष $= \underset{x\to 0}{Lt} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\left(\frac{0}{0}\right)$

$$= \underset{x\to 0}{Lt} \frac{-a\sin ax + b\sin bx}{2x}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \underset{x\to 0}{Lt} \frac{-a^2\cos ax + b^2\cos bx}{2} = \frac{b^2-a^2}{2}$$

इसी तरह

दायाँ पक्ष $= \underset{x\to 0^+}{Lt} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} = \frac{b^2-a^2}{2}$

और $f(0) = \frac{b^2-a^2}{2}$

यहाँ $\underset{x\to 0^-}{Lt} f(x) = \underset{x\to 0^+}{Lt} f(x) = f(0) = \frac{b^2-a^2}{2}$

अत: $f(x)$, $x = 0$ पर संतत है।

30. यहाँ $\frac{dr}{d\theta} = -3a\cos^2\theta.\sin\theta$

$$\frac{dy}{d\theta} = 3a\sin^2\theta.\cos\theta$$

अब $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{3a\sin^2\theta.\cos\theta}{-3a\cos^2\theta.\sin\theta}$

अभिलम्ब की ढाल $= -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)} = \frac{1}{\tan\theta} = \cot\theta$

θ पर अभिलम्ब का ढाल $= \frac{\pi}{2} = \cot\frac{\pi}{4} = 1$

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

31. मान लिया कि $x^x = z$; तब $y = e^z$.

अब चूँकि $y = e^z$

$\therefore$ $\frac{dy}{dx} = e^z$ ...(1)

फिर चूँकि $x^x = z$

$\therefore$ $\log z = x\log x$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{z}\cdot\frac{dz}{dx} = x\cdot\frac{1}{x} + \log x = 1 + \log x$

$\Rightarrow$ $\frac{dz}{dx} = z(1+\log x) = x^2(1+\log x)$ ...(2)

अत: (1) और (2) से,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \frac{dz}{dx} = e^z \cdot x^x(1+\log x)$$

$$= e^{x^x} \cdot x^x(1+\log x).$$

32. मान लिया कि $y = f(x) = \sin\theta(1+\cos\theta)$.

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \sin\theta(-\sin\theta) + (1+\cos\theta)\cos\theta$

$= -\sin^2\theta + \cos\theta + \cos^2\theta$ ...(1)

और $\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin\theta - 2\sin 2\theta.$

अब, max./min. के लिए, $\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow \quad \cos\theta + \cos 2\theta = 0$

$\Rightarrow \quad \cos 2\theta = -\cos\theta = \cos(\pi - \theta)$

$\Rightarrow \quad 2\theta = \pi - \theta \Rightarrow 3\theta = \pi \qquad \therefore \quad \theta = \frac{\pi}{3}$

लेकिन $\theta\frac{\pi}{3}$ के लिए,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin\frac{\pi}{3} - 2\sin\frac{2\pi}{3}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}(-\text{ve})$$

$\therefore$ y को $\theta = \frac{\pi}{3}$ पर स्थानीय उच्चतम (local maximum) प्राप्त है।

अब, $f(0) = 0, f(\pi) = \pi$

और $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\left(1+\cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$

$\therefore \quad f(x)$ का $\theta = \frac{\pi}{3}$ पर महत्तम मान $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

33. मान लिया $I = \int_0^\pi \frac{x}{1+\sin x}dx$ ...(1)

तब $I = \int_0^\pi \frac{\pi - x}{1+\sin(\pi - x)}dx$; चूँकि $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$

$= \int_0^\pi \frac{\pi - x}{1+\sin x}dx$ ...(2)

(1) और (2) को जोड़ने पर, हम पाते हैं

$$2I = \int_0^\pi \frac{\pi}{1+\sin x}dx = \pi\int_0^\pi \frac{1}{1+\sin x}dx$$

$$= \pi\int_0^\pi \left[\frac{1}{1+\sin x}\times\frac{1-\sin x}{1-\sin x}\right]dx$$

$$= \pi\int_0^\pi \left[\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}\right]dx = \pi\int_0^\pi \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx$$

$$= \pi\int_0^\pi \left[\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x}\right]dx$$

$$= \pi\int_0^\pi (\sec^2 x - \sec x\tan x)dx$$

$$= \pi[\tan x - \sec x]_0^\pi = \pi(2) = 2\pi$$

$\therefore \quad I = \pi$

34. यहाँ $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{2xy}$ ...(1)

यह एक homogeneous equation है।

$y = vx$ रेखा जिससे $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ ...(2)

(1) और (2) से, $v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x^2+v^2}{2xy} = \frac{x^2+v^2x^2}{2xvx} = \frac{1+v^2}{2v}$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{2v} - v = \frac{1+v^2-2v^2}{2v} = \frac{1-v^2}{2v}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = \frac{2vdv}{1-v^2} \Rightarrow \frac{dx}{x} - \frac{2vdv}{1-v^2} = 0.$$

Integrate करने पर, $\log x + \log(1-v^2) = \log k$, जहाँ k अचर है

$$\Rightarrow \quad \log x + \log\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) = \log k$$

$$\Rightarrow \quad \log\left\{\frac{(x^2-y^2)}{x^2}\cdot x\right\} = \log k$$

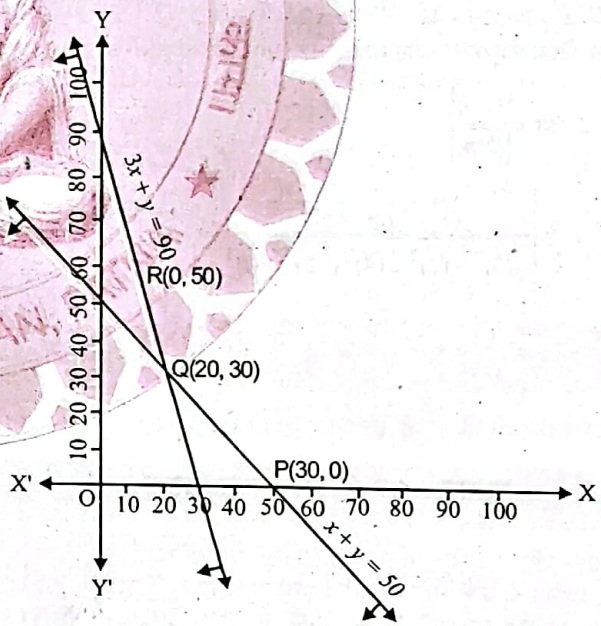
$\Rightarrow \quad x^2 - y^2 = xk$, यही अभीष्ट हल है।

35. सबसे पहले हम असमीकरणों के दिए निकाय द्वारा निर्धारित feasuble region का आलेख खींचते हैं।

ग्राफ में छायांकित क्षेत्र feasible region है जो व्यवरोधों के दिए गए निकाय द्वारा निर्धारित किया गया है। हम देखते हैं कि feasible regaion OCPB परिबद्ध है।

कोणीय बिंदु (corner point) O, P, Q, R के निर्देशांक क्रमशः (0, 0), (30, 0), (20, 30) और (0, 50) है।

अब हम हरेक corner point पर $Z = 60x + 15y$ का मान ज्ञात करते हैं।



Corner Point	Corresponding Value $Z = 60x + 15y$
O (0, 0)	0
P (30, 3)	1800
Q (20, 30)	1650
R (0, 50)	750

अतः बिंदु (3, 0) पर Z का अधिकतम मान 21 है।

36. A और B एक-दूसरे का सिर्फ उसी दिशा में एक-दूसरे का खंडन करते हैं जब एक सत्य बोलता है और दूसरा सत्य नहीं बोलता है।

मान लिया कि E_1 = घटना कि A सत्य बोलता है;
E_2 = घटना कि B सत्य बोलता है।

तब E'_1 = घटना कि A असत्य बोतला है,
E'_2 = घटना कि B असत्य बोलता है।

दिया हुआ है कि $P(E_1)=\frac{75}{100}=\frac{3}{4}, P(E_2)=\frac{80}{100}=\frac{4}{5}$

$\therefore \quad P(E_1')=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}, P(E_2')=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}.$

(i) इसकी प्रायिकता कि A सत्य बोलता है और B असत्य बोलता है, वह है

$$P(E_1 \cap E_2')=P(E_1)\cdot P(E_2')=\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{20}.$$

(ii) इसकी प्रायिकता कि B सत्य बोलता है और A असत्य बोलता है, वह है

$$P(E_2 \cap E_1')=P(E_2)\cdot P(E_2')=\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{5}.$$

$\because$ (i) और (ii) परस्पर अपवर्जी है, इसलिए अभीष्ट प्रायिकता

$$=\frac{3}{20}+\frac{1}{5}=\frac{7}{20}.$$

$\therefore$ प्रतिशत जब वे एक-दूसरे का खंडन करते हैं $=35\%$ है।

37. दिए गए समीकरणों को सदिश रूप में बदल देने पर रेखा का समीकरण है।

$$\vec{r}=(\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k})+\lambda(3\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k})$$

तथा समतल का समीकरण है–

$$\vec{r}=2(2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k})$$

यहाँ $\vec{b}=3\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}$ और $\vec{n}=2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$

मान लिया कि रेखा और समतल के अभिलंब के बीच का कोण θ है।

$$\therefore \quad \sin\theta\left|\frac{\vec{b}-\vec{n}}{|\vec{b}||\vec{n}|}\right|$$

$$=\left|\frac{(3\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k})(2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k})}{\sqrt{(3)^2+(2)^2+(4)^2}\sqrt{(2)^2+(1)^2+(-3)^2}}\right|$$

$$=\left|\frac{6+2-12}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{14}}\right|=\left|\frac{-4}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{14}}\right|=\frac{4}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{14}}$$

अत: $\theta=\sin^{-1}\left|\frac{-4}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{14}}\right|$.

38. $C_1 \to C_1 - C_3$ और $C_2 \to C_2 - C_3$ का प्रयोग करने पर, अर्थात् last column को क्रमश: first और second column से घटाने पर, हम पाते हैं

$$\Delta=\begin{vmatrix}(b+c)^2-a^2 & 0 & a^2\\ 0 & (c+a)^2-b^2 & b^2\\ c^2-(a+b)^2 & c^2-(a+b)^2 & (a+b)^2\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)^2\begin{vmatrix}b+c-a & 0 & a^2\\ 0 & c+a-b & b^2\\ c-a-b & c-a-b & (a+b)^2\end{vmatrix}$$

First और second row के योगफल को last row से घटाने पर, हम पाते हैं

$$\Delta=(a+b+c)^2\begin{vmatrix}b+c-a & 0 & a^2\\ 0 & c+a-b & b^2\\ -2b & -2a & 2ab\end{vmatrix}.$$

पहला दो columns को क्रमश: a, B से गुणा करने पर, हम पाते हैं

$$\Delta=\frac{2(a+b+c)^2}{ab}\begin{vmatrix}a(b+c-a) & 0 & a^2\\ 0 & b(c+a-b) & b^2\\ -ab & -ab & ab\end{vmatrix}.$$

अब last column को दूसरे columns में जोड़ने पर, हम पाते हैं

$$\Delta=\frac{2(a+b+c)^2}{ab}\begin{vmatrix}a(b+c) & a^2 & a^2\\ b^2 & b(c+a) & b^2\\ 0 & 0 & ab\end{vmatrix}.$$

$$=\frac{2(a+b+c)^2}{ab}\times ab\begin{vmatrix}a(b+c) & a^2\\ b^2 & b(c+a)\end{vmatrix}$$

$$=2(a+b+c)^2[ab(b+c)(c+a)-a^2b^2]$$
$$=2abc(a+b+c)^3.$$