MODEL PAPER – 3

- परीक्षार्थियों के लिये निर्देश MODEL PAPER – 1 के समान होगा।

खण्ड–अ (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

प्रश्न संख्या 1 से 100 तक के प्रत्येक प्रश्न के साथ चार विकल्प दिये गए हैं, जिनमें से एक सही है। अपने द्वारा चुने गए सही विकल्प को OMR शीट पर चिह्नित करें। किन्हीं 50 प्रश्नों का उत्तर दें। $50 \times 1 = 50$

1. यदि $f : R \to R$ एक फलन हो तो $f^{-1} : R \to R$ प्राप्त होगा यदि f हो
   (A) एकैक अंत: क्षेपी (B) आच्छादक
   (C) एकैक आच्छादक (D) बहुएक आच्छादक

2. यदि $f : R \to R, f(x) = 2x + 3$ से परिभाषित हो तो $f^{-1} : (x) =$
   (A) $2x - 3$ (B) $\frac{x-3}{2}$
   (C) $\frac{x+3}{2}$ (D) इनमें से कोई नहीं

3. यदि $A = \{a, b, c\}$ एवं $B = \{e, f\}$, तो $A \times B$ के निम्न उपसमुच्चयों में कौन A से B में एक प्रतिचित्रण है ?
   (A) $\{(a, e), (c, f), (b, e), (b, f)\}$ (B) $\{(a, e), (b, f)\}$
   (C) $\{(a, f), (b, e), (c, e)\}$ (D) इनमें से कोई नहीं

4. माना I पूर्णांक संख्याओं का समुच्चय है। एक द्विआधारी संबंध $Z \times Z$ में निम्न प्रकार परिभाषित है–
   $(a, b)*(c, d) = (a + c, b + d + a)$,
   तब द्विआधारी संक्रिया $*$ है
   (A) क्रमविनिमेय नहीं (B) साहचर्य नहीं
   (C) क्रमविनिमेय और साहचर्य (D) तत्समक अवयव नहीं रखता

5. $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x =$
   (A) $\frac{\pi}{2}$ (B) π (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) 2π

6. $\tan^{-1}1 + \tan^{-1}2 + \tan^{-1}3 =$

(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) π (D) $\frac{\pi}{4}$

7. फलन $f(x) = \sqrt{\sin^{-1}x}$ का प्रांत है

(A) [0, 1] (B) [–1, 1] (C) [–1, 0] (D) {0, 1}

8. $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ का मुख्य मान है

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{3\pi}{4}$ (C) $\frac{5\pi}{4}$ (D) कोई नहीं

9. $A = \begin{bmatrix} 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 11 & 10 & 9 \\ 8 & 9 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow 2A + 2B =$

(A) $\begin{bmatrix} 20 & 20 & 20 \\ 20 & 20 & 20 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 40 & 40 & 40 \\ 40 & 40 & 40 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 20 & 20 & 20 \\ 40 & 40 & 40 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 40 & 40 & 40 \\ 20 & 20 & 20 \end{bmatrix}$

10. 3×3 कोटि के ऐसे आव्यूहों की कुल कितनी संख्या होगी जिनकी प्रत्येक प्रविष्टि 0 या 1 है ?

(A) 27 (B) 18 (C) 81 (D) 512

11. $\begin{bmatrix} -\cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम है

(A) $\begin{bmatrix} -\cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ (D) कोई नहीं

12. यदि $\begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 18 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 18 & 6 \end{vmatrix}$ तो $x =$

(A) ±6 (B) 6 (C) –5 (D) 7

13. यदि $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 4 \\ 6 & x \end{vmatrix}$ तब x का मान है

(A) ±2 (B) $\pm\frac{1}{3}$ (C) $\pm\sqrt{3}$ (D) ±(0.5)

14. $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix} = ?$

(A) 0 (B) $(c-b)(b-c)(c-a)$
(C) $a^2 + b^2 + c^2$ (D) कोई नहीं

15. $\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x + \operatorname{cosec}^{-1}x) =$

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) 1 (C) 0 (D) $-\frac{\pi}{2}$

16. यदि $y = \sin(\log x)$, तब $\frac{dy}{dx} =$ .....

(A) $\frac{1}{x}\cos(\log x)$ (B) $\frac{1}{x}\sin(\log x)$

(C) 0 (D) 1

17. यदि $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$, तब $\frac{dy}{dx} =$

(A) $\frac{x+1}{x}$ (B) $\frac{1}{1+x}$

(C) $\frac{-1}{(1+x)^2}$ (D) कोई नहीं

18. रोले के प्रमेय के अनुसार, समीकरण $\sin x + x\cos x = 0$ का मान कम-से-कम एक मूल होनेवाले अंतराल है

(A) $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ (B) $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (C) $(0, \pi)$ (D) $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

19. वक्र $y = x^2$ के बिन्दु (0, 0) पर स्पर्श रेखा द्वारा x अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ बनाया गया कोण है

(A) 90° (B) 0°
(C) 45° (D) इनमें से कोई नहीं

20. किसी बिंदु पर $y = x + 1$, वक्र $y^2 = 4x$ की स्पर्श रेखा है

(A) (1, 2) (B) (2, 1) (C) (1, – 2) (D) (–1, 2)

21. भुजा में 3% वृद्धि के कारण भुजा x के घन के आयतन में सन्निकट परिवर्तन है

(A) $0.6x^3$ m³ (B) $0.9x^3$ m³ (C) $0.06x^3$ m³ (D) $0.09x^3$ m³

22. किसी बिंदु पर $y = x + 1$, वक्र $y^2 = 4x$ की स्पर्श रेखा है

(A) (1, 2) (B) (2, 1) (C) (1,–2) (D) (–1, 2)

23. $\int \frac{dx}{1+x^2} =$

(A) $\cot^{-1}x + c$ (B) $\tan^{-1}x + c$
(C) $\sec^{-1}x + c$ (D) $\operatorname{cosec}^{-1}x + c$

24. $\int \frac{dx}{1-\sin x} =$

(A) $\tan x - \sec x + k$ (B) $\tan x + \sec x + k$
(C) $\tan^2 x + \sec^2 x + k$ (D) $2(\tan x - \sec x) + k$

25. $\int\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx =$

(A) $\frac{1}{x}x^{1/3} + 2x^{1/2} + c$ (B) $\frac{2}{3}x^{2/3} + \frac{1}{2}x^2 + c$

(C) $\frac{2}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2} + c$ (D) $\frac{3}{2}x^{3/2} + \frac{1}{2}x^{1/2} + c$

26. $\int \log e^x dx =$

(A) $x\log x + x + k$ (B) $x\log x - x + k$
(C) $\log x + x + k$ (D) $\log x - x + k$

27. $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}dx =$

(A) $\log(\sin x + \cos x)$ (B) x
(C) $\log x$ (D) $\log \sin(\cos x)$

28. $\int_{-\pi\pi/2}^{\pi/2} \sin^9 x dx$ बराबर है

(A) –1 (B) 1
(C) 0 (D) इनमें से कोई नहीं

29. $\int_0^{\pi/4} \tan^2\theta d\theta =$

(A) $1 - \frac{\pi}{4}$ (B) $1 + \frac{\pi}{4}$ (C) $-1 - \frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

30. वक्र $y = x^3$, x-अक्ष एवं कोटियों $x = -2, x = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है

(A) -9 (B) $\frac{-15}{4}$ (C) $\frac{15}{4}$ (D) $\frac{17}{4}$

31. $x = 0$ और $x = \mu$ के बीच वक्र $y = \sin x$ का क्षेत्रफल है

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

32. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + y = e^{x+y}$ का व्यापक हल है

(A) $e^x + e^y = k$ (B) $e^x + e^y = k$
(C) $e^x + e^y = k$ (D) $e^x + e^y = k$

33. समीकरण $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2$ का व्यापक हल है

(A) x (B) $-x$ (C) $\log x$ (D) x^2

34. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = e^{2x}$ का व्यापक हल है

(A) $y = e^x + C$ (B) $y = e^{2x} + C$
(C) $y = \frac{e^{2x}}{2} + C$ (D) $y = e^{2x} - 4$

35. वक्र-कुल $x^2 + y^2 = a^2$ के संगत अवकल समीकरण की कोटि क्या है ?

(A) 2 (B) 1
(C) 4 (D) इनमें से कोई नहीं

36. यदि $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ तो

(A) $\vec{a} \| \vec{b}$ (B) $\vec{a} \perp \vec{b}$
(C) $|a| = |b|$ (D) इनमें से कोई नहीं

37. $\vec{k} \times \vec{i} =$

(A) 0 (B) 1 (C) $\vec{j}$ (D) $-\vec{j}$

38. $\vec{j} \times \vec{k} =$

(A) $\vec{i}$ (B) $-\vec{i}$ (C) $\vec{0}$ (D) 1

39. यदि सदिशों $2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ और $3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ के बीच का कोण θ हो तो $\sin\theta =$

(A) $\frac{2}{\sqrt{7}}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{7}$ (C) 1 (D) कोई नहीं

40. $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ एकतलीय होंगे, यदि

(A) $(\vec{a}.\vec{b})\vec{c} = 0$ (B) $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = 0$
(C) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ (D) $\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c}) = 0$

41. समतल $2x - y + 4z = 5$ और $5x - 2.5y + 10z = 6$ हैं

(A) परस्पर लंब (B) समांतर
(C) y-अक्ष पर प्रतिच्छेदन करते हैं (D) बिंदु $\left(0, 0, \frac{5}{4}\right)$ से गुजरते हैं

42. तल $7x + 4x - 2z + 5 = 0$ पर अभिलंब के दिक्अनुपात हैं

(A) 7, 4, –2 (B) 7, 4, 5
(C) 7, 4, 2 (D) 4, –2, 5

43. y-अक्ष पर स्थित प्रत्येक बिंदु (x, y, z) के लिए

(A) $x = 0, y = 0$ (B) $x = 0, z = 0$
(C) $y = 0, z = 0$ (D) इनमें से कोई नहीं

44. रैखिक प्रोग्रामन समस्या में

(A) उद्देश्य फलन, व्यवरोध तथा चर सभी रैखिक होते हैं
(B) केवल उद्देश्य फलन रैखिक होते हैं
(C) केवल चर रैखिक होते हैं
(D) केवल व्यवरोध रैखिक होते हैं

45. सुसंगत क्षेत्र बिंदुओं का वह समुच्चय है जो संतुष्ट करता है

(A) उद्देश्य फलन को (B) कुछ व्यवरोध को
(C) सभी व्यवरोध को (D) कोई नहीं

46. यदि A और B दो स्वतंत्र घटनाएँ हों तो

(A) P(AB') = P(A)P(B) (B) P(AB') = P(A)P(B')
(C) P(AB') = P(A') + P(B) (D) P(AB') = P(A) + P(B')

47. यदि $P(A) = \frac{3}{8}$; $P(B) = \frac{1}{2}$ तथा $P(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{4}$, तो $P(A \cup B) =$ .....

(A) 0 (B) $\frac{5}{8}$ (C) 1 (D) 4

48. यदि $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$ और $P(\bar{A}) = \frac{2}{3}$ तब $P(\bar{A} \cap B) =$

(A) $\frac{1}{12}$ (B) $\frac{7}{12}$ (C) $\frac{5}{12}$ (D) $\frac{1}{2}$

49. यदि $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = 0$ तब $P\left(\frac{A}{B}\right)$ है

(A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) अपरिभाषित (D) 1

50. यदि A और B दो घटनाएँ हैं कि $P(A) \neq 0$ और $P\left(\frac{B}{A}\right) = 1$, तब

(A) $A \subset B$ (B) $B \subset A$ (C) $B = \phi$ (D) $A = \phi$

51. मान लीजिए कि N में एक द्विआधारी संक्रिया $*$: $a * b = a$ तथा b का L.C.M. द्वारा परिभाषित है तब N में $*$ का तत्समक अवयव है

(A) 0 (B) 1 (C) – 1 (D) कोई नहीं

52. $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{1}}{2}\right)$ बराबर है

(A) $\frac{2\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{3}$

53. सारणिक $\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & 1 & bc \\ \frac{1}{b} & 1 & ca \\ \frac{1}{c} & 1 & ab \end{vmatrix}$ का मान है

(A) 0 (B) abc (C) $1/abc$ (D) कोई नहीं

54. सारणिक $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 65 \\ 3 & 8 & 75 \\ 5 & 9 & 86 \end{vmatrix}$ का मान है

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

55. वक्र $y = 2x^2 + 3\sin x$ के बिन्दु $x = 0$ पर अभिलंब की ढाल है

(A) –3 (B) –1/3 (C) 3 (D) 1/3

56. निम्नलिखित अंतरालों में से किस अंतराल में $f(x) = x^{100} + \sin x - 1$ द्वारा प्रदत्त फलन f निरंतर ह्रासमान है ?

(A) $(0, 1)$ (B) $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

(C) $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (D) इनमें से कोई नहीं

57. अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + x^3\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = x^4$ की कोटि है

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

58. अवकल समीकरण $\frac{d^4y}{dx^4} + \sin(y''') = 0$ की घात और कोटि है

(A) परिभाषित नहीं 4 (B) 0, 4

(C) 1, 4 (D) 2, 4

59. x-अक्ष क्रमशः x, y और z अक्षों के साथ क्रमशः $0°, 90°, 90°$ का कोण बनाता है, तब x-अक्ष की दिक् कोज्या है

(A) 0, 0, 1 (B) 1, 0, 0 (C) 0, 0, 1 (D) 0, 1, 0

60. यदि a, b, c अन्तःखण्ड काटने वाली समतल की मूल बिन्दु से दूरी p है तब

(A) $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} = \frac{1}{p^2}$ (B) $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{p^2}$

(C) $\frac{1}{a^2b^2} - \frac{1}{b^2c^2} - \frac{1}{c^2a^2} = \frac{1}{p^2}$ (D) $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = \frac{1}{p}$

61. दो पासों को एक बार उछाला जाता है। पहले पासे पर सम संख्या मिलने की या कुल 8 होने की प्रायिकता है

(A) $\frac{1}{36}$ (B) $\frac{3}{36}$ (C) $\frac{11}{36}$ (D) $\frac{5}{9}$

62. द्विपद वितरण में माध्य और प्रसरण क्रमशः 4 और 2 है, तब असफलता की प्रायिकता है

(A) $\frac{128}{256}$ (B) $\frac{219}{256}$ (C) $\frac{7}{64}$ (D) $\frac{28}{256}$

63. प्रथम 100 प्राकृत संख्याओं में से तीन संख्याओं को 2 और 3 से विभाजित होने की प्रायिकता है

(A) $\frac{4}{25}$ (B) $\frac{4}{35}$ (C) $\frac{4}{55}$ (D) $\frac{4}{1255}$

64. यदि $P(x) = \frac{x}{15}$; $x = 1, 2, 3, 4, 5, 0$ अन्यथा तो $P(x = 1$ या $2)$ है

(A) $\frac{1}{15}$ (B) $\frac{2}{15}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) कोई नहीं

65. यदि A और B स्वतंत्र घटनाएँ हो, तो निम्नलिखित में कौन बाकी किसके साथ समान नहीं ?

(A) $P(A' \cap B') - P(A \cap B)$ (B) $P(A)^3 + P(B)^3 = 1$

(C) $P(B) - P(A')$ (D) $P(B') - P(A)$

66. माना $f(x) = \sin x + \cos x$, $g(x) = x^2 - 1$ तब $g[f(x)]$ निम्न प्रांत में व्युत्क्रमणीय है

(A) $[-\pi/2, 10]$ (B) $[-\pi/2, \pi]$

(C) $[-\pi/4, \pi/4]$ (D) $[0, \pi/2]$

67. $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x^2 + x + 1}$ का परास है

(A) $(1, \infty)$ (B) $\left(\frac{1}{7}, 3\right)$ (C) $\left(1, \frac{7}{5}\right)$ (D) $\left(1, \frac{11}{7}\right)$

68. $f(x) = \frac{\log_2(x+3)}{x^2 + 3x + 2}$ का प्रांत है

(A) $R - \{-1, -2\}$ (B) $(-2, \infty)$

(C) $R - \{-1, -2, -3\}$ (D) $(-3, +\infty) - (-1, -2)$

69. माना $f : R \to R, f(x) = x^4$ से परिभाषित है

(A) f one-one onto है (B) f many-one onto है

(C) f one-one परंतु onto नहीं है

(D) f न तो f one-one है और न onto है

70. $\tan^{-1}\frac{x}{y} - \tan^{-1}\frac{x-y}{x+y}$ का मान है

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{3\pi}{4}$

71. $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$ का मुख्य मान निम्न में से कौन है ?

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{3\pi}{4}$ (C) $\frac{5\pi}{4}$ (D) कोई नहीं

72. $\cos^{-1}\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right)$ का मान निम्न में से कौन है ?

(A) $\frac{7\pi}{6}$ (B) $\frac{5\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{6}$

73. यदि $\sin^{-1}(1-x) - 2\sin^{-1}x = \frac{\pi}{2}$, तो x बराबर है

(A) $0, \frac{1}{2}$ (B) $1, \frac{1}{2}$ (C) 0 (D) $\frac{1}{2}$

74. यदि $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ और $A^2 = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ तब

(A) $\alpha = a^2 + b^2, \beta = ab$ (B) $\alpha = a^2 + b^2, \beta = 2ab$

(C) $\alpha = a^2 + b^2, \beta = a^2 - b^2$ (D) $\alpha = 2ab, \beta = a^2 + b^2$

75. यदि $A^2 - A + I = 0$ हो तब A का व्युत्क्रम है

(A) A (B) $A + I$ (C) $I - A$ (D) $A - I$

76. यदि $F(x) = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$ तब $F(x) \cdot F(y)$ बराबर है

(A) $F(x)$ (B) $F(y)$ (C) $F(x+y)$ (D) $F(x-y)$

77. एक आव्यूह 18 अवयव रखता है तब आव्यूह का धनात्मक कोटि है

(A) 3 (B) 4 (C) 6 (D) 5

78. $\begin{vmatrix} x+3 & 5 & 7 \\ 3 & x+5 & 7 \\ 3 & 5 & x+7 \end{vmatrix} = 0$ तब $x =$

(A) $x = 0, -15$ (B) $x = 0, 15$

(C) $x = 0, 7$ (D) $x = 0, 9$

79. यदि $\begin{vmatrix} x+1 & 2 & 3 \\ 1 & x+2 & 3 \\ 1 & 2 & x+3 \end{vmatrix} = 0$ तब $x = 0$ और

(A) -6 (B) 6 (C) 4 (D) 3

80. $\begin{vmatrix} x & 1 & y+z \\ y & 1 & z+x \\ z & 1 & z+y \end{vmatrix} = ?$

(A) $1 + x + y + z$ (B) $x + y + z$

(C) 0 (D) कोई नहीं

81. यदि $y^2 = ax^2 + 2bx + c$ तब $y^3\frac{d^2y}{dx^2} =$

(A) $b^2 - 4ac$ (B) $b^2 - ac$

(C) $ac - b^2$ (D) $4(b^2 + ac)$

82. यदि $y = \cos(m \sin^{-1} x)$ कौन-सा कथन सत्य है ?

(A) $(1-x^2)y + xy_1 - m^2y = 0$

(B) $(1-x^2)y_2 - xy_1 + m^2y = 0$

(C) $(1+x^2)y_2 + xy_1 + m^2y = 0$

(D) $(1+x)y_2 - xy_1 + m^2y = 0$

83. यदि $y = (x+\sqrt{1+x^2})^n$ तब $(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx^2}$ का मान है

(A) n^2y (B) $-n^2y$ (C) $-y$ (D) $2n^2y$

84. यदि $y = a^x$, तब $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान

(A) $a^x \log a$ (B) $a^x (\log a)^2$

(C) $(a^x)^2 \log a$ (D) कोई नहीं

85. $\frac{d}{dx}\int f(x)dx$ किसके समान है ?

(A) $f(x)$ (B) $f(x)$ (C) $f(x)$ (D) $f(x) + c$

86. $\int \frac{d\theta(x)}{dt}dx$ किसके समान है ?

(A) $\phi(x)$ (B) $\theta(x)$ (C) $\phi''(x)$ (D) कोई नहीं

87. $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx =$

(A) $\log x + \log(1+\sqrt{x}) + c$ (B) $2\log(1+\sqrt{x}) + c$

(C) $\log(1+\sqrt{x}) + c$ (D) $\log x + c$

88. अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ की कोटि (श्रेणी) निम्न में कौन है ?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) कोई नहीं

89. अवकल समीकरण $\frac{d^4y}{dx^4} = y + \left(\frac{dy}{dx}\right)^4$ की कोटि और घात क्रमशः है

(A) 2, 2 (B) 4, 1 (C) 2, 4 (D) 4, 2

90. यदि $\hat{a}$ और $\hat{b}$ दो इकाई सदिश हो और उनके बीच का कोण θ हो तो $|\hat{a} - \hat{b}|$ बराबर है

(A) $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ (B) $2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

(C) $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ (D) $2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

91. यदि $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{c} = 3\hat{i} - p\hat{j} + 5\hat{k}$ एकतलीय हो तो $P =$

(A) 6 (B) –6 (C) 2 (D) –2

92. यदि $\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}$ इकाई सदिश हो जिसमें कि $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ तो $\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{c} + \vec{c}.\vec{a}$ का मान है

(A) 1 (B) 3 (C) $-\frac{3}{2}$ (D) कोई नहीं

93. यदि $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ तो $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण होगा

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) 0 (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{6}$

94. The locus of $xy + yz = 0$ is

(A) A pair of st. lines (B) A pair of parallel lines

(C) A pair of parallel planes (D) A pair of perpendicular planes

95. यदि $2x + 5y - 6z + 3 = 0$ एक समतल का समीकरण हो, तो दिए गए समतल के समांतर समतल का समीकरण होगा

(A) $3x + 5y - 6z + 3 = 0$ (B) $2x - 5y - 6z + 3 = 0$

(C) $2x + 5y - 6z + k = 0$ (D) इनमें से कोई नहीं

96. तल $2x + 3y - 4z + 8 = 0$ के समांतर तल का समीकरण है

(A) $2x + 3y + 4z + 8 = 0$ (B) $3x + 2y - 4z - 8 = 0$

(C) $2x + 3y - 4z + 5 = 0$ (D) $2x + 3y - 4z + 15 = 0$

97. बिन्दु $P(1, 2, 3)$ से तल $x + y + z = 3$ पर PQ लंब डाला जाता है, जहाँ Q लंब का पाद है, तो

(A) $PQ = 3$ (B) $PQ = \sqrt{3}$

(C) $Q = (0, 1, 2)$ (D) $Q = (2, 1, 0)$

98. $2x + 3y \geq 6$, $x - 2y \leq 2$, $6x + 4y \leq 24$, $-3x + 2y < 3$ एवं $x \geq 0, y \geq 0$, x और y का मान क्या है ?

(A) $\frac{18}{7}, \frac{2}{7}$ (B) $\frac{7}{2}, \frac{3}{4}$ (C) $\frac{3}{2}, \frac{15}{2}$ (D) कोई नहीं

99. z का अधिकतम मान $z = 4x + 2y$ प्रतिबन्ध $2x + 3y \leq 18, x + y \geq 10$ $x, y \leq 0$ के अंतर्गत है

(A) 36 (B) 40 (C) 30 (D) कोई नहीं

100. यदि A और B कोई दो घटनाएँ हो ताकि $P(A) = 0{\cdot}2, P(B) = 0{\cdot}6$ तो $P(A \cup B) + P(A \cap B) =$

(A) 0.9 (B) 0.9 (C) 0.8 (D) 0.12

खण्ड–ब (गैर-वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न संख्या 1 से 30 लघु उत्तरीय हैं। किन्हीं 15 प्रश्नों के उत्तर दें। प्रत्येक के लिए 2 अंक निर्धारित है। $15 \times 2 = 30$

1. यदि f एक महत्तम पूर्णांक फलन और g एक मापांक फलन हो, तो $(fog)\left(-\frac{3}{2}\right) + (gof)\left(\frac{4}{3}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

2. यदि $f: R \to R$ जहाँ $f(x) = x^3 + 5$ तब सिद्ध कीजिए कि f के एक प्रतिलोम फलन है और इसे ज्ञात कीजिए।

3. सिद्ध करें कि $2\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{7} = \tan^{-1}\frac{31}{17}$

4. सिद्ध करें कि $1\tan^{-1}(\cos x) = \tan^{-1}(2\ \text{cosec}\ x)$

5. यदि $A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ और $B=\begin{bmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix}$, सिद्ध करें कि $AB=BA$.

6. यदि $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ और $B=\begin{bmatrix}0 & 4\\ -1 & 7\end{bmatrix}$ तो $3A^2-2B$ ज्ञात करें।

7. सिद्ध करें कि $\begin{vmatrix}3a & -a+b & -a+c\\ -b+a & 3b & -b+c\\ -c+a & -c+b & 3c\end{vmatrix}=3(a+b+c)(ab+bc+ca)$

8. यदि a, b, c समांतर श्रेणी में हो, तो निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए–
$$\begin{vmatrix}2y+4 & 5y+7 & 8y+a\\ 3y+5 & 6y+8 & 9y+b\\ 4y+6 & 7y+9 & 10y+c\end{vmatrix}$$

9. मान लिया कि $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin 3x}{x}, & \text{यदि } x\neq 0\\ 1, & \text{यदि } x=0\end{cases}$
क्या $f(x), x=0$ पर संतत है ?

10. यदि $f(x)=\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x\cos 16x$ तो $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ज्ञात कीजिए।

11. $\frac{dy}{dx}$ निकालें, जब $y=\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+.....\text{to }\infty}}}$

12. समाकलन करें : $\int\tan^4 x\,dx$

13. समाकलन करें : $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}dx$

14. मान ज्ञात करें : $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$.

15. मान निकालें : $\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\frac{r^3}{r^4+n^4}$.

16. मान निकालें : $\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+.....+\sqrt{n}}{n^{3/2}}$.

17. हल करें : $\frac{dy}{dx}=(x+y)^2$.

18. मान लिया कि $\vec{a}=4\vec{i}+5\vec{j}-\vec{k}, \vec{b}=\vec{i}-4\vec{j}+5\vec{k}$ और $\vec{c}=4\vec{i}+\vec{i}-\vec{k}$. एक सदिश d ऐसा ज्ञात कीजिए जो $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दोनों पर लम्ब हो और $\vec{c}\cdot\vec{d}=21$.

19. यदि $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$ और $|a|=3, |b|=5, |c|=7$, तो $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

20. सिद्ध कीजिए कि रेखा $\frac{x-3}{2}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-5}{4}$ समतल $3x+2y-3z=5$ के समान्तर है।

21. एक सिक्का को 3 बार उछाला जाता है। ठीक दो बार शीर्ष आने की प्रायिकता निकालें।

22. यदि A और B दो स्वतंत्र घटनाएँ इस तरह से हैं कि $P(A')=0.65, P(A\cup B)=0.65$ और $P(B)=p$, तो p का मान ज्ञात कीजिए।

23. सिद्ध करें कि $(\vec{a}\times\vec{b})^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=a^2b^2$

24. सिद्ध करें कि $4(\cos^{-1}3+\text{cosec}^{-1}\sqrt{5})=\pi$

25. मान लीजिए कि $f: R\to R$ और $g: R\to R$ क्रमशः $f(x)=x^2$ और $g(x)=x+1$ द्वारा परिभाषित है। दिखाइए कि $gof\neq fog$.

26. दिखाएँ कि $\cos x$ एक संतत फलन है।

27. साबित करना है : $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$

28. मान ज्ञात कीजिए : $\int\frac{e^{\tan^{-1}x}}{(1+x^2)^2}dx$.

29. $x=0$ एवं $x=2\pi$ तथा वक्र $y=\sin x$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

30. दिखावें कि $y=a\cos(\log x)+b\sin(\log x)$ अवकलन समीकरण $x^2.\frac{d^2y}{dx^2}+x.\frac{dy}{dx}+y=0$ का एक हल है।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न संख्या 31 से 38 दीर्घ उत्तरीय प्रश्न हैं। किन्हीं 4 प्रश्नों के उत्तर दें। प्रत्येक के लिए 5 अंक निर्धारित हैं। **4 × 5 = 20**

31. $\frac{dy}{dx}$ निकालें, जब $x^y+y^x=1$.

32. एक समकोण वृत्ताकार शंकु में महत्तम आयतन वाले बेलन का आयतन निकालें जब शंकु की ऊँचाई h और अर्द्ध-शीर्षकोण α है।

33. वृत्त x^2+y^2 और रेखा $y=x$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करें जो कि प्रथम चरण में है।

34. न्यूनतमीकरण करें : $z=200x+500y$
जबकि : $x+2y\geq 10$
$3x+4y\leq 24$
$x, y\geq 0$.

35. तीन छात्रों द्वारा एक प्रश्न के हल करने की प्रायिकताएँ $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ हैं, तो प्रश्न के हल किए जाने की प्रायिकता निकालें।

36. मान निकालें : $\int_0^{\pi/4}\frac{\sin x}{\cos 3x+3\cos x}dx$

37. समाकलन करें : $\int\sin^4 x dx$

38. क्या $x^{1/x}$ को उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ मान है ? संभव मान निकालें।

उत्तर

खण्ड–अ (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

1. (C)	2. (B)	3. (C)	4. (B)	5. (A)	6. (C)
7. (A)	8. (A)	9. (B)	10. (D)	11. (C)	12. (C)
13. (C)	14. (A)	15. (C)	16. (A)	17. (C)	18. (C)
19. (B)	20. (C)	21. (D)	22. (A)	23. (B)	24. (B)
25. (C)	26. (B)	27. (B)	28. (D)	29. (A)	30. (D)
31. (B)	32. (A)	33. (C)	34. (C)	35. (B)	36. (B)
37. (C)	38. (A)	39. (D)	40. (B)	41. (B)	42. (A)
43. (B)	44. (A)	45. (C)	46. (C)	47. (B)	48. (C)
49. (C)	50. (A)	51. (B)	52. (D)	53. (A)	54. (A)
55. (B)	56. (A)	57. (B)	58. (A)	59. (B)	60. (B)
61. (D)	62. (C)	63. (D)	64. (C)	65. (C)	66. (C)
67. (B)	68. (D)	69. (D)	70. (D)	71. (A)	72. (B)
73. (C)	74. (B)	75. (C)	76. (C)	77. (C)	78. (A)
79. (A)	80. (C)	81. (C)	82. (B)	83. (A)	84. (B)
85. (B)	86. (A)	87. (B)	88. (B)	89. (B)	90. (B)
91. (A)	92. (C)	93. (A)	94. (D)	95. (C)	96. (C)
97. (B,C)	98. (B)	99. (D)	100. (C)		

खण्ड–ब (गैर-वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

लघु उत्तरीय प्रश्न

1. f एक महत्तम पूर्णांक फलन है तथा g एक मापांक फलन है।

$$(fog)\left(-\frac{3}{2}\right)+(gof)\left(\frac{1}{3}\right)=f\left\{\left(\frac{-3}{2}\right)\right\}-g\left\{f\left(\frac{4}{3}\right)\right\}$$

$$=f\left(\left[\frac{3}{2}\right]\right)+g\left(\left[\frac{4}{3}\right]\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)+g(1)\ =1+1=2$$

2. $f: R\to R, f(x)=x^3+5$

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1^3+5=x_2^3+5$$

$$\Rightarrow\quad x_1^3=x_2^3\Rightarrow x_1=x_2$$

अतः यह एकैकी फलन है। साथ ही इसका प्रांत $x\in R$ है।
अतः यह आच्छादक फलन है। इसका प्रतिलोम निकलेगा।

$$y=x^3+5$$

$$\Rightarrow\quad x^3=y-5\Rightarrow x=(y-5)^{1/3}$$

$$\Rightarrow\quad f^{-1}(y)=(y-5)^{1/3}$$

$$\Rightarrow\quad f^{-1}(x)=(x-5)^{1/3}$$

3. $2\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\tan^{-1}\frac{31}{17}$

हम जानते हैं $2\tan^{-1}\frac{1}{2}=\tan^{-1}\left|\frac{2\times\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right|$

$$\therefore\quad 2\tan^{-1}\frac{1}{2}=\tan^{-1}\frac{4}{3}$$

या, $\tan^{-1}\frac{4}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\tan^{-1}\frac{31}{17}=\tan^{-1}\frac{\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{7}\right)}{\left(1-\frac{4}{3}\times\frac{1}{7}\right)}=\tan^{-1}\frac{31}{17}$.

4. $\tan^{-1}\left(\frac{2\cos x}{\sin^2 x}\right)=\tan^{-1}(2\operatorname{cosec} x)$

$$\Rightarrow\quad \frac{2\cos x}{\sin^2 x}=\frac{2}{\sin x}\Rightarrow\cot x=1$$

$$\Rightarrow\quad x=\cot^{-1}(1)$$

$$\Rightarrow\quad x=\cot^{-1}\left(\cot\frac{\pi}{4}\right)\therefore x=\frac{\pi}{4}.$$

5. $AB=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}\cos\theta\cos\phi-\sin\theta\sin\phi & -\cos\theta\sin\phi-\sin\theta\cos\phi\\ \sin\theta\cos\phi+\cos\theta\sin\phi & -\sin\theta\sin\phi+\cos\theta\cdot\cos\phi\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos(\theta+\phi) & -\sin(\theta+\phi)\\ \sin(\theta+\phi) & \cos(\theta+\phi)\end{bmatrix}.$$

$$BA=\begin{bmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}.$$

$$=\begin{bmatrix}\cos(\phi+\theta) & -\sin(\phi+\theta)\\ \sin(\phi+\theta) & \cos(\phi+\theta)\end{bmatrix}$$

$\therefore$ AB = BA **Proved.**

6. $A\cdot A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4-3 & -2-2\\ 6+6 & -3+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -4\\ 12 & 1\end{bmatrix}$

$$3A^2-2B=3\begin{bmatrix}1 & -4\\ 12 & 1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}0 & 4\\ -1 & 7\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3 & -12\\ 36 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 8\\ -2 & 14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -20\\ 40 & -10\end{bmatrix}.$$

7. $\begin{vmatrix}3a & -a+b & -a+c\\ -b+a & 3b & -b+c\\ -c+a & -c+b & 3c\end{vmatrix}$ $\qquad [C_1\to C_1+C_2+C_2]$

$$\therefore\quad \Delta=\begin{vmatrix}a+b+c & -a+b & -a+c\\ a+b+c & 3b & -b+c\\ a+b+c & -c+b & 3c\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix}1 & -a+b & -a+c\\ 1 & 3b & -b+c\\ 1 & -c+b & 3c\end{vmatrix}$$

$$[R_1\to R_1-R_2, R_2\to R_2-R_3]$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix}0 & -a-2b & b-c\\ 0 & 2b+c & -b-2c\\ 1 & -c+b & 3c\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}-a-2b & 2b+c\\ b-a & -b-2c\end{vmatrix}$$

$$=3\,(a+b+c)\,(ab+bc+ca).$$

8. $\because$ a, b, c A.P. में है।

$$\therefore\quad a-b=b-c$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}2y+4 & 5y+7 & 8y+a\\ 3y+5 & 6y+8 & 9y+b\\ 4y+6 & 7y+9 & 10y+c\end{vmatrix}\qquad [C_1\to C_1-C_3-2C_2]$$

$$=\begin{vmatrix}a-10 & 5y+7 & 8y+a\\ b-11 & 6y+8 & 9y+b\\ c-12 & 7y+9 & 10y+c\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a & 5y & 8y\\ b & 6y & 9y\\ c & 7y & 10y\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-10 & 7 & a\\ -11 & 8 & b\\ -12 & 9 & c\end{vmatrix}$$

$$[R_1\to R_1-R_2, R_2\to R_2-R_3]$$

$$=\begin{vmatrix}a-b & -y & -y\\ b-c & -y & -y\\ c & 7y & 10y\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & -1 & a-b\\ 1 & -1 & b-c\\ -12 & 9 & c\end{vmatrix}$$

$$=0+0\qquad [\because a-b=b-c\therefore R_1R_2]$$

$$=0$$

9. $f(0+0)=\lim_{h\to 0}f(0+h)=\lim_{h\to 0}\frac{\sin 3(0+h)}{0+h}=1$

$$f(0-0)=\lim_{h\to 0}f(0-h)=\lim_{h\to 0}\frac{\sin 3(0-h)}{0-h}=1$$

$$f(0)=0$$

$\therefore$ $f(0+0)=f(0-0)\neq f(0)$

$\therefore$ $f(x), x=0$ पर संतत नहीं है।

10. $f(x)=\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x\cdot\cos 8x\cdot\cos 16x$

$$\because\quad f(x)=\frac{\sin 32x}{2^5\sin x}$$

भाग के नियम से, $\frac{dy}{dx}=\frac{v\cdot\frac{du}{dx}-u\cdot\frac{dv}{dx}}{v^2}$

$$=\frac{32\sin x\cdot 32\cos 32x-32\cos x\cdot\sin 32x}{32\alpha\cdot 32\sin^2 2x}$$

$$\therefore\quad f'(x)=\frac{32\sin x\cos 32x-\cos x\sin 32x}{32\sin^2 2x}$$

अब, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{16\sqrt{2}}{6}=\sqrt{2}.$

11. प्रश्न से, $y=\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+.....\infty}}}$ तक

वर्ग करने पर, $y^2=\sin x+\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+.....\infty}}}$ तक

$\therefore\quad y^2=\sin x+y.$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d(y^2)}{dy}\times\frac{dy}{dx}=\frac{d(\sin x)}{dx}+\frac{dy}{dx}$$

या, $2y\frac{dy}{dy}=\cos x+\frac{dy}{dx}$ या $(2y-1)\frac{dy}{dx}=\cos x$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{\cos x}{2y-1}$$

12. $I=\int\tan^2 x\cdot\tan^2 x dx=\int\tan^2 x(\sec^2 x-1)dx$

$=\int\tan^2 x\cdot\sec^2 x dx-\int\tan^2 x dx=I_1-I_2$, मान लें।

अब $I_1=\int\tan^2 x\cdot\sec^2 x dx$ के लिए

$\tan x=z$ प्रतिस्थापित करने पर $\sec^2 x\,dx=dz$

$$=\int z^2\cdot dz=\frac{z^3}{3}=\frac{\tan^3 x}{3}.$$

तथा $I_2=\int\tan^2 x dx=\int(\sec^2 x-1)dx=\tan x-x.$

$$\therefore\quad I=\frac{\tan^3 x}{3}-(\tan x-x)+c,\ \text{(समाकलन अचर को जोड़ने पर)}$$

$$=\frac{\tan^3 x}{3}-\tan x+x+c.$$

13. $\sqrt{x}+2=y$ रखें, तो $\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=dy$

या, $dx=2\sqrt{x}dy;$

साथ ही, $\sqrt{x}=y-2$, या, $x=(y-2)^2$

अतः $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx=\int\frac{\sqrt{x}2\sqrt{x}}{y}dy=2\int\frac{dxy}{y}$

$$=2\int\frac{(y-2)^2}{y}dx=2\int\frac{y^2-4y+4}{y}dy$$

$$=2\int\left(y-4+\frac{4}{y}\right)dy=2\int ydy-8\int dy+8\int\frac{dy}{y}$$

$$=2\cdot\frac{y^2}{2}-8y+8\cdot\log y+c$$

$$=(\sqrt{x}+2)^2-8(\sqrt{x}+2)+8\log(\sqrt{x}+2)+c.$$

$$=x-4\sqrt{x}+8\log(\sqrt{x}+2)+c.$$

14. मान लें, $x=a\sin\theta$; तो $dx=a\cos\theta d\theta$.

$$\therefore\quad I=\int\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}\cdot a\cos\theta d\theta$$

$$=a^2\int\cos^2\theta d\theta=\frac{a^2}{2}\int 2\cos^2\theta d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\int 1+\cos 2\theta)d\theta=\frac{a^2}{2}\left[\theta+\frac{\sin\theta}{2}\right]$$

$$=\frac{a^2}{2}\theta+\frac{a^2}{2}\sin\theta\cdot\cos\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}+\frac{a^2}{2}\cdot\frac{x}{a}\cdot\sqrt{1-\sin^2\theta}$$

$$=\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\cdot a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}.$$

सीमा $=\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{nr^3}{r^4+n^4}=\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{\left(\frac{r}{n}\right)^3}{1+\left(\frac{r}{n}\right)^4}.$

लेकिन $\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{r}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx.$

$$\therefore\quad \text{सीमा}=\int_0^1\frac{x^3}{1+x^4}dx=\frac{1}{4}\int_0^1\frac{4x^3}{1+x^4}dx$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1\frac{d(1+x^4)}{1+x^4}=\frac{1}{4}[\log(1+x^4)]_0^1$$

$$=\frac{1}{4}\cdot[\log 2-\log 1)]=\frac{1}{4}\log 2.$$

16. सीमा $=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt{1}}{n^{3/2}}+\frac{\sqrt{2}}{n^{3/2}}+\frac{\sqrt{3}}{n^{3/2}}+...+\frac{\sqrt{n}}{n^{3/2}}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\frac{\sqrt{r}}{n^{3/2}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\sqrt{\frac{r}{n}}.$$

लेकिन $\lim_{n\to\infty}\sum\frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{r}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx.$

$$\therefore\quad \text{सीमा}=\int_0^1\sqrt{x}dx=\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1=\frac{2}{3}.$$

17. यहाँ $\frac{dy}{dx}=(x+y)^2$ ...(1)

$x+y=z$ रखा।

x के सापेक्ष अवकल करने पर, हम पाते हैं कि

$$1+\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}\quad\text{या,}\quad\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}-1.$$

समीकरण (1) में मान रखने पर, हम पाते हैं कि

$\frac{dz}{dx}-1=z^2$ या, $\frac{dz}{dx}=1+z^2$ या, $dx=\frac{dz}{1+z^2}$.

समाकलन करने पर, हम पाते हैं कि $\int dx=\int\frac{dz}{1+z^2}$

या, $c+x=\tan^{-1}z$ या, $z=\tan(c+x)$

या, $x+y=\tan(c+x)$, जहाँ c समाकलन-अचर है।

18. कोई सदिश जो $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दोनों पर लंब है, निम्न द्वारा प्रदत्त है–

$$\therefore\quad \vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\4&5&-1\\1&-4&5\end{vmatrix}$$

$$=(25-4)\vec{i}-(20+1)\vec{j}+(-16-5)\vec{k}$$

$$=21\vec{i}-21\vec{j}-21\vec{k}$$

इस प्रकार हम ले सकते हैं $\vec{d}=\lambda(21\vec{i}-21\vec{j}-21\vec{k})$

अब $\vec{c}\cdot\vec{d}=1$

$$\Rightarrow\quad \vec{c}\cdot\vec{d}=\lambda(21\vec{i}-21\vec{j}-21\vec{k})(3\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})$$

$$=(61\lambda-21\lambda+21\lambda)=61\lambda$$

$$\because\quad \vec{c}\cdot\vec{d}=21\Rightarrow 61\lambda=21\quad\therefore\lambda=\frac{1}{3}$$

$$\therefore\quad \vec{d}=\frac{1}{3}(21\vec{i}-21\vec{j}-21\vec{k})=7\vec{i}-7\vec{j}-7\vec{k}$$

19. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0, |\vec{a}|=3, |\vec{b}|=5, |\vec{c}|=7,$

हमें, $(\vec{a}+\vec{b})^2=c^2$

$$\Rightarrow\quad (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=c^2$$

$$\Rightarrow\quad a^2+b^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=c^2$$

$$\Rightarrow\quad 3^2+5^2+2.3.5\cos\theta=7^2$$

$$\Rightarrow\quad 34+30\cos\theta=49$$

$$\Rightarrow\quad 30\cos\theta=15$$

$$\therefore\quad \cos\theta=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad \theta=\frac{\pi}{3}.$$

20. दिए गए समीकरणों को सदिश रूप (vector form) में बदलने पर, रेखा का समीकरण है–

$$\vec{r}=(3\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k})+\lambda(2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k})$$

यहाँ $\vec{b}=2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$ और $\vec{n}=3\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$

$$\therefore\quad \vec{b}\cdot\vec{n}=(2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k})(3\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k})$$

$$=6+6-12=0$$

$\therefore$ दी हुई रेखा दिए गए समतल के समांतर है।

21. यहाँ $\{H, T\}=S, n(S)=2$

यदि $A=\{H\}$, तो $n(A)=1$;

$B=\{T\}$, तो $n(B)=1$.

अब $P=$ एक प्रयास (उछाल) में एक शीर्ष आने की प्रायिकता

$$=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{1}{2};$$

$q=$ एक प्रयास में पृष्ठ आने की प्रायिकता $=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{1}{2}$.

$\therefore$ 3 प्रयासों में 2 शीर्ष आने की प्रायिकता

$$={}^3C_2p^2q^{3-2}={}^3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{3!}{2!1!}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3\times2}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}.$$

22. $P(A')=0.65, P(A\cup B)=0.65$

$P(A)=1-P(A')=1-0.65=0.35$

A और B स्वतंत्र घटनाएँ हैं।

$$\therefore\quad P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

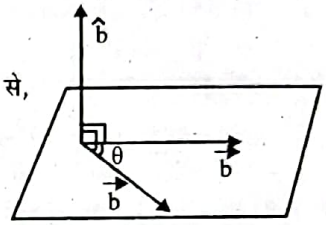
$$\Rightarrow\quad P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A).P(B)$$

$$\Rightarrow\quad 0.65=0.35+P(B)-0.35\,P(B)$$

$$\Rightarrow\quad 0.65-0.35+P(B)-0.35\,P(B)$$

$$\Rightarrow\quad P(B)=\frac{0.30}{0.65}=\frac{30}{65}=\frac{6}{13}\quad\therefore\quad P(B)=\frac{6}{13}$$

23. मान लें कि दोनों सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ पर लंब इकाई सदिश $\hat{n}$ है, तो परिभाषा से,



तल

$$\vec{a}\times\vec{b}=ab\sin\theta\hat{n}$$

तथा $\vec{a}\cdot\vec{b}=ab\cos\theta$,

जहाँ कि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण θ है।

अब $(\vec{a}\times\vec{b})^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2$

$$=(ab\sin\theta\hat{n})^2+(ab\cos\theta)^2$$

$$=a^2b^2(\sin^2\theta\cdot1^2+a^2b^2\cos^2\theta,\qquad(\because\hat{n}^2=1^2)$$

$$=a^2b^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=a^2b^2\cdot1=a^2b^2.$$

अतः $(\vec{a}\times\vec{b})^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=a^2b^2$.

24. L. H. S $=4(\cot^{-1}3+\operatorname{cosec}^{-1}\sqrt{5})$

$$=\left(\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)\qquad\left[\because\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)\right]$$

$$=4\tan^{-1}\left(\frac{5}{6}\times\frac{6}{5}\right)=4\tan^{-1}(1)$$

$$=2\cdot2\tan^{-1}(1)=2\tan^{-1}\frac{2.1}{1-(1)^2}\qquad\left[\because2\tan^{-1}x=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}\right]$$

$$=2\tan^{-1}(0)=\pi$$

25. $f: R\to R$ और $g: R\to R$

$f(x)=x^2$, $g(x)=x+1$

$gof=g\{f(x)\}=g(x^2)=x^2+1$

और $gof=f\{g(x)\}=f(x+1)$

$=(x+1)^2=x^2+2x+1$

अतः $gof\neq fog$ $\because x^2+1\,x^2+1\neq2x+1$.

26. माना कि $f(x)=\cos x$

माना कि c एक स्वतंत्र वास्तविक संख्या है।

अब $f(c)=\cos c$

साथ ही $\lim\limits_{x\to c-0}f(x)=\lim\limits_{x\to c-0}(\cos x)=\cos c$

तथा $\lim\limits_{x\to c+0}f(x)=\lim\limits_{x\to c+0}(\cos x)=\cos c$

स्पष्टतः $\lim\limits_{x\to c-0}f(x)=\lim\limits_{x\to c+0}f(x)=f(c)$

अतः $f(x)$, प्रत्येक वास्तविक संख्या c के लिए $x=c$ पर संतत है।

अतः $f(x)$ एक संतत फलन है।

27. $x = a + b - t \Rightarrow dx = -dt$ रखने पर

$$\therefore \quad \int_a^b f(x)dx = -\int_{a+b-a}^{a+b-b} f(a+b-t)dt$$

$$= -\int_a^b f(a+b-t)dt$$

$$= \int_a^b f(a+b-t)dt = \int_a^b f(a+b-x)dx \text{ सिद्ध हुआ।}$$

28. दिया है $I = \int \frac{e^{\tan^{-1}x}}{(1+x^2)^2}dx$; $\tan^{-1}x = z$,

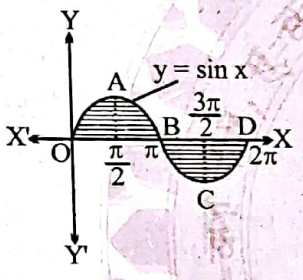
जिससे कि $\frac{1}{1+x^2}dx = dz$

$$I = \int e^z dz = e^z + c = e^{\tan^{-1}x + c} \quad \textbf{Ans.}$$

29. सर्वप्रथम, $x = 0$ तथा $x = 2\pi$ के बीच वक्र $y = \sin x$ खींचे तथा मुख्य सीमाएँ लेकर समाकलन करें। समाकलन के लिए समीकरण $y = |\sin x|$ का उपयोग करें।

वक्र $y = \sin x$ का ग्राफ आकृति अनुसार खींचा जा सकता है।

$\therefore$ अभीष्ट क्षेत्रफल = OABO का क्षेत्रफल + BCDB का क्षेत्रफल



$$= \int_0^{\pi} |\sin x|\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} |\sin x|\,dx$$

$$= \int_0^{\pi} \sin x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x)\,dx \quad (\because \sin x \geq 0 \text{ जब } x \in [0, \pi]$$

तथा $\sin x \leq 0$ जब $x \in [\pi, 2\pi]$

$$= [-\cos x]_0^{\pi} + [\cos x]_{\pi}^{2\pi} = -\cos\pi + \cos 0 + \cos 2\pi - \cos\pi$$

$$= -(-1) + 1 + 1 - (-1) = 4 \text{ वर्ग इकाई}$$

30. $y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$ ...(i)

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-a\sin(\log x)}{x} + \frac{b\cos(\log x)}{x}$$

$$\Rightarrow \quad x.\frac{dy}{dx} = -a\sin(\log x) + b\cos(\log x) \quad \text{...(ii)}$$

पुनः अवकलन करने पर

$$\frac{x.d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = \frac{-a\cos(\log x)}{x} - \frac{b\sin(\log x)}{x}$$

$$\Rightarrow \quad x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = -[a\cos(\log x) + b\sin(\log x)]$$

अतः $y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$ दिये गये अवकलन समीकरण का एक हल है।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

31. माना $u = x^y$, $v = y^x$; तो $u + v = 1$

$$\therefore \quad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} = 0 \quad \text{...(1)}$$

अब $u = x^y$ में log लेने पर

$$\log u = y\log x$$

या, $\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx}\log x + y\cdot\frac{1}{x}$

$$\therefore \quad \frac{du}{dx} = u\left(\frac{dy}{dx}\log x + \frac{y}{x}\right) = x^y\cdot\left(\frac{dy}{dx}\log x + \frac{y}{x}\right).$$

फिर $v = y^x$ में log लेने पर

$$\log v = x\log y$$

$$\therefore \quad \frac{1}{v}\cdot\frac{dv}{dx} = \log y + x\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \quad \frac{dv}{dx} = v\left(\log y + \frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx}\right) = y^x\left(\log y + \frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx}\right).$$

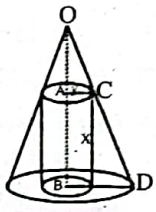
$\therefore$ (1) में इन मानों को रखने पर

$$x^y\left(\frac{dy}{dx}\log x + \frac{y}{x}\right) + y^x\left(\log y + \frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

या, $\frac{dy}{dx}[x^y\log x + y^{x-1}\cdot x] = -(y^x\log y + x^{y-1}\cdot y)$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y(x^{x-1} + y^{x-1}\log y)}{x(y^{x+1} + x^{y-1}\log x)}$$

मान लें कि बेलन की ऊँचाई $= x$ और आधार की त्रिज्या $= y$ है। तो $OA = h - x$ और $AC = y$.



$\therefore$ ΔOAC में, $\tan\alpha = \frac{AC}{OA} = \frac{y}{h-x}$

या, $y = (h-x)\tan\alpha$.

मान लें, बेलन का आयतन $= V$ है, तो

$$V = \pi y^2 x = \pi(h-x)^2\tan^2\alpha\,.\,x$$

$$\frac{dV}{dx} = \pi\tan^2\alpha\cdot\{(h-x)^2 + 2(h-x)\cdot(-1)x\}$$

$$= \pi\tan^2\alpha\cdot(h-x)(h-3x)\cdot$$

V के उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ मान के लिए $\frac{dV}{dx} = 0$

या, $(h-x)(h-3x) = 0 \quad \therefore x = h, \frac{h}{3}$.

फिर $\frac{d^2V}{dx^2} = \pi\tan^2\alpha[-1.(h-3x) + (h-x)(-3)]\cdot$

जब $x = \frac{h}{3}, \frac{d^2V}{dx^2} = \pi\tan^2\alpha.\left[-1\cdot\left(h - 3\cdot\frac{h}{3}\right) + \left(h - \frac{h}{3}\right)(-3)\right]$

$$= \pi h\tan^2\alpha < 0$$

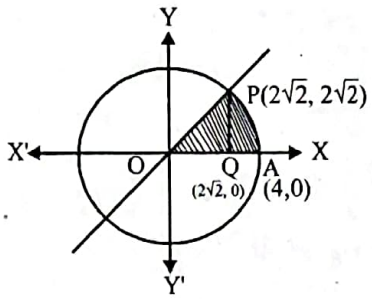
$\therefore$ V महत्तम होगा जब $x = \frac{h}{3}$ है।

$\therefore$ महत्तम आयतन $= \pi\cdot\left(h - \frac{h}{3}\right)^2\cdot\tan^2\alpha\cdot\frac{h}{3} = \frac{4\pi h^3}{27}\tan^2\alpha.$

33. वृत्त $x^2 + y^2 = 16$ के केन्द्र के नियामक (0,0) तथा त्रिज्या 4 है। रेखा $x = y$ मूल बिंदु से होकर जाती है।

$$x^2 + y^2 = 16 \quad \text{...(1)}$$

और $y = x$ ...(2)



हल करने पर, $2x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$

$\therefore \quad y = 2\sqrt{2}$

अत: (i) और (ii) दोनों एक दूसरे को प्रथम चरण में $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ पर काटती है।

अत: अभीष्ट क्षेत्रफल

$$= \int_0^{2\sqrt{2}} x\,dx + \int_{2\sqrt{2}}^{4} \sqrt{16 - x^2}\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{2\sqrt{2}} + \left[\frac{x\sqrt{16-x^2}}{2} + \frac{16}{2}\sin^{-1}\frac{x}{4}\right]_{2\sqrt{2}}^{4}$$

$$= 4 + \left[0 + 8\sin^{-1} - \left\{\frac{2\sqrt{2}}{2}\sqrt{16-8} + 8\sin^{-1}\frac{2\sqrt{2}}{4}\right\}\right]$$

$$= 4 + 8 \times \frac{\pi}{2} - \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} - 8 \times \frac{\pi}{4}$$

$= 4 + 4\pi - 4 - 2\pi = 2\pi$ वर्ग इकाई।

34. हमें $z = 200x + 500y$ को न्यूनतम करना है।

$x \geq 0, y \geq 0, x + 2y \geq 10$ और $3x + 4y \leq 24$

अब $x + y = 10 \Rightarrow \frac{x}{10} + \frac{y}{5} = 1$

यह रेखा बिंदु (10, 0) और (0, 5) से गुजरता है।

फिर $3x + 4y = 24 \Rightarrow \frac{x}{8} + \frac{y}{6} = 1$

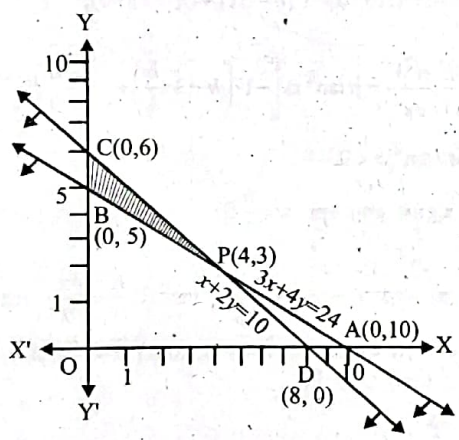
यह रेखा बिंदु (8, 0) और (0, 6) से गुजरता है।

B का नियामक = (0, 5)

C का नियामक = (0,6)

समीकरण $3x + 4y = 24$ और $x + 2y$ को हल करने पर हमें प्राप्त होता है

$x = 4$ और $y = 3$



अत: P का नियामक $= (4, 3)$

बिंदु $B(0, 5)$ पर, $Z = 0 + 500 \times 5 = 2500$

बिंदु $C(0, 6)$ पर $Z = 0 + 6 \times 500 = 3000$

बिंदु $P(4, 3)$ पर, $Z = 200 \times 4 + 500 \times 3 = 2300$

अत: Z का न्यूनतम मान 2300 है जो बिंदु $P(4, 3)$ पर है।

अर्थात् $x = 4$ और $y = 3$.

35. मान लिया A = पहले छात्र द्वारा हल करने की घटना,

B = दूसरे छात्र द्वारा हल करने की घटना,

C = तीसरे छात्र द्वारा हल करने की घटना,

प्रश्न से, $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(C) = \frac{1}{4}$

मान लिया किसी एक के द्वारा हल करने की घटना E है।

तो $E = A \cup B \cup C$ अत: $P(A \cup B \cup C) = P(E)$ निकालना है, क्योंकि किसी एक के हल कर लेने से प्रश्न हल हो जाता है। अब

$P(E) = P(A \cup B \cup C)$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A) \cdot P(B) - P(B) \cdot P(C)$

$\qquad - P(A) \cdot P(C) + P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

($\because$ A, B, C स्वतंत्र है)

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

36. $$I = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{4\cos^3 x - 3\cos x + 3\cos x}\,dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{4\cos^3 x}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/4} \tan x \cdot \sec^2 x\,dx.$$

मान लें कि $\tan x = z$, तो $\sec^2 x\,dx = dz$

जब $x = 0, z = \tan 0 = 0$ एवं जब $x = \frac{\pi}{4}, z = \tan\frac{\pi}{4} = 1$.

$$\therefore \quad I = \frac{1}{4}\int_0^1 z\,dz = \frac{1}{4}\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{1}{8}.$$

37. $$I = \frac{1}{4}\int 4\sin^4 x\,dx = \frac{1}{4}\int (2\sin^2 x)^2\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (1 - \cos 2x)^2\,dx = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{8}\int 2\cos^2 2x\,dx$$

$$= \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{1}{8}\int (1 + \cos 4x)\,dx$$

$$= \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x\,dx$$

$$= \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{1}{8}\cdot\frac{\sin 4x}{4} + c$$

$$= \frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{31} + c$$

38. मान लें, $7 = x^{1/x}$

दोनों पक्षों का logarithm लेने पर, $\log y = \frac{1}{x}\log x$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x^2}\log x + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}(1-\log x). \qquad \ldots(i)$$

अब उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ मान के लिए $\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore \quad \frac{1}{x^2}(1-\log x) = 0$ या, $\log x = 1 = \log e \quad \therefore x = e.$

फिर (i) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{-2}{x^3}(1-\log x) + \frac{1}{x^2}\cdot\frac{-1}{x}.$$

जब $x = e, \frac{dy}{dx} = 0$ और $y = e^{1/e}$;

$$\therefore \quad \frac{1}{e^{1/e}}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2}{e^3}(1-\log e) - \frac{1}{e^3} = \frac{-1}{e^3}$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{e^{1/e}}{e^3} < 0 \qquad (\because e^{1/e} > 0, e^3 > 0)$$

$\therefore$ $x = e$ पर फलन को उच्चिष्ठ मान है और वह उच्चिष्ठ मान $= e^{1/e}$.