MODEL PAPER – 4

- परीक्षार्थियों के लिये निर्देश MODEL PAPER – 1 के समान होगा।

खण्ड–अ (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

प्रश्न संख्या 1 से 100 तक के प्रत्येक प्रश्न के साथ चार विकल्प दिये गए हैं, जिनमें से एक सही है। अपने द्वारा चुने गए सही विकल्प को OMR शीट पर चिह्नित करें। किन्हीं 50 प्रश्नों का उत्तर दें। $50 \times 1 = 5$

1. प्राकृतिक संख्याओं के समुच्चय में संबंध 'से छोटा' है
(A) केवल स्वतुल्य (B) केवल सममित
(C) तुल्यता संबंध (D) केवल संक्रमक

2. यदि फलन $f : R \to R$ इस प्रकार परिभाषित है कि $f(x) = (3 - x^3)^{1/3}$ तो $fof(x)$ है
(A) x^{13} (B) x^3 (C) $(3 - x^3)$ (D) x

3. यदि संक्रिया * परिभाषित है कि $a * b = a^2 + b^2$ तो $(1 * 2) * 5$ है
(A) 3125 (B) 625 (C) 125 (D) 50

4. $\sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right) =$
(A) $\frac{2\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{4\pi}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$

5. $\tan^{-1}\sqrt{3} - \cot^{-1}(-\sqrt{3}) =$
(A) π (B) 0 (C) $2\sqrt{3}$ (D) $-\frac{\pi}{3}$

6. $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ का मुख्य मान है
(A) $\frac{2\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{4\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{3}$

7. $\tan^{-1} x =$
(A) $\cos^{-1} x$ (B) $\frac{1}{\cot^{-1} x}$ (C) $\cot^{-1}\frac{1}{x}$ (D) $-\cot^{-1} x$

8. $\cot^{-1} 3 + \operatorname{cosec}^{-1}\sqrt{5}$ बराबर है
(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{6}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

9. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ तो $AB =$
(A) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (D) 10

10. यदि $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & -1 \end{bmatrix}$ तो $A^2 =$
(A) एकांक आव्यूह (B) A
(C) रिक्त आव्यूह (D) –A

11. यदि $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, तो $|2A| =$
(A) 2 |A| (B) 4 |A|
(C) 8 |A| (D) इनमें से कोई नहीं

12. $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम है
(A) $\begin{bmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$
(C) $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$ (D) इनमें से कोई नहीं

13. $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ एक वर्ग आव्यूह है यदि
(A) $m = n$ (B) $m < n$
(C) $m > n$ (D) इनमें से कोई नहीं

14. यदि A और B वर्ग आव्यूह हैं, तो $(AB)'$
(A) $B'A'$ (B) $A'B'$ (C) AB' (D) $A'B$.

15. यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ तो सहखंडज A है
(A) $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
(C) $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

16. यदि $\begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 18 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 2 \\ 18 & 6 \end{vmatrix}$ तो $x =$
(A) ± 6 (B) 6 (C) –5 (D) 7

17. $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) =$
(A) $\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$ (B) $\sqrt{1-x^2}$ (C) $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

18. यदि $y = \cos(\log x)$, तो $\frac{dy}{dx} =$

(A) $-\sin(\log x)$ (B) $\frac{-\sin(\log x)}{x}$

(C) $\frac{\cos(\log x)}{x}$ (D) $-\sin(\log x).\log x$

19. यदि $y = \sec^{-1}\left[\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right] + \sin^{-1}\left[\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right]$ हो, तो $\frac{dy}{dx} =$

(A) 1 (B) π (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) 0

20. यदि $y = \log x^x$, तो $\frac{dy}{dx} =$

(A) 1 (B) $\log x$

(C) $\log(ex)$ (D) इनमें से कोई नहीं

21. वक्र $y = x^2$ के $(0, 0)$ बिंदु पर स्पर्शी द्वारा, x-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ बनाया गया कोण है

(A) 90° (B) 0° (C) 45° (D) 30°

22. किसी उत्पाद की x इकाइयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय $R(x)$ रुपयों में $R(x) = 13x^2 + 26x + 15$ से प्रदत्त है। तब सीमांत आय क्या होगा जब $x = 7$ है

(A) 208 रु॰ (B) 308 रु॰ (C) 140 रु॰ (D) 508 रु॰

23. वक्र $y = 2x^2 + 3\sin x$ के बिन्दु $x = 0$ पर अभिलम्ब की प्रवणता है

(A) 3 (B) $\frac{1}{3}$ (C) -3 (D) $-\frac{1}{3}$

24. फलन $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 18$

(A) प्रत्येक में $x \in R$ निरंतर ह्रासमान है

(B) $\forall x \in R$ में निरंतर वर्धमान है

(C) $]-\infty, 0[$ में वर्धमान और $[0, \infty[$ में ह्रासमान है

(D) इनमें से कोई नहीं

25. $\int \frac{-1}{1+x2}dx =$

(A) $\tan^{-1}x + k$ (B) $\sec^{-1}x + k$

(C) $\text{cosec}^{-1}x + k$ (D) $\cot^{-1}x + k$

26. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} =$

(A) $\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + k$ (B) $\frac{1}{a}\tan^{-1}(x+a) + k$

(C) $\sin^{-1}\frac{x}{a} + k$ (D) $\cos^{-1}\frac{x}{a} + k$

27. $\int \frac{(1+\log x)^2}{x}dx =$

(A) $\frac{1}{3}(1+\log x)^3 + C$ (B) $\frac{1}{2}(1+\log x)^2 + C$

(C) $\log\left(\log\overline{1+x}\right) + C$ (D) इनमें से कोई नहीं

28. $\int_{-2}^{2} |x| dx =$

(A) 0 (B) 2 (C) 1 (D) 4

29. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}dx$ बराबर है

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{4}$

(C) π (D) इनमें से कोई नहीं

30. $\int x^2 e^{x^3} dx$

(A) $\frac{1}{3}e^{x^3} + C$ (B) $\frac{1}{3}e^{x^2} + C$

(C) $\frac{1}{2}e^{x^3} + C$ (D) $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$

31. प्रथम चतुर्थांश में वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ एवं रेखा और $x = 0, x = 2$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है

(A) π (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

32. अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + x^3\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 = x^4$ की कोटि निम्नांकित में कौन-सी होगी ?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 0

33. वक्र $y = a\sin px + b\cos px$ का अवकल समीकरण है

(A) $y'' + py = 0$ (B) $y'' + p^2y = 0$

(C) $y'' - py = 0$ (D) $y'' - p^2y = 0$

34. अवकल समीकरण $2x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + y = 0$ की कोटि है

(A) 2 (B) 1

(C) 0 (D) परिभाषित नहीं

35. अवकल समीकरण $x\frac{dy}{dx} - y = 2x^2$ का समाकलन गुणांक है

(A) e^{-x} (B) e^{-y} (C) $1/x$ (D) x

36. $\left|-\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}\right| =$

(A) $\sqrt{15}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) 2 (D) $\sqrt{14}$

37. यदि $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}, \vec{b} = 4\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}$, तो $\vec{a}.\vec{b} =$

(A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 7

38. $\vec{a} \times \vec{a} =$

(A) 1 (B) 0 (C) a^2 (D) a

39. $\vec{k}.\vec{k} =$

(A) 1 (B) 0 (C) $\vec{i}$ (D) $\vec{j}$

40. यदि $2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, 6\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ एवं $14\vec{i} - 5\vec{j} + 4\vec{k}$ क्रमशः बिन्दु A, B, C के स्थिति सदिश हैं, तो

(A) A, B, C समरेखीय हैं (B) A, B, C असमरेखीय

(C) $\vec{AB} \perp \vec{BC}$ (D) इनमें से कोई नहीं

41. यदि l, m, n एक सरल रेखा की दिक् कोज्याएँ हैं, तो

(A) $l^2 + m^2 - n^2 = 1$ (B) $l^2 - m^2 + n^2 = 1$

(C) $l^2 - m^2 - n^2 = 1$ (D) $l^2 + m^2 + n^2 = 1$

42. किसी सरल रेखा के दिक् अनुपात 1, 3, 5 हैं, तो रेखा की दिक् कोज्याएँ हैं

(A) $\frac{1}{\sqrt{35}}, \frac{3}{\sqrt{35}}, \frac{5}{\sqrt{35}}$ (B) $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \frac{5}{9}$

(C) $\frac{2}{\sqrt{35}}, \frac{5}{\sqrt{35}}, \frac{1}{\sqrt{35}}$ (D) $\frac{5}{\sqrt{35}}, \frac{3}{\sqrt{35}}, \frac{1}{\sqrt{35}}$

43. एक सरल रेखा (2, −1, 3) से गुजरती है और इसके दिक् अनुपात 3, −1, 2 हैं। इस रेखा के समीकरण है

(A) $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+3}{2}$ (B) $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{2}$

(C) $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{3}$ (D) $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{3}$

44. यदि $2x + 5y - 6z + 3 = 0$ एक समतल का समीकरण हो, तो दिए गए समतल के समांतर समतल का समीकरण होगा

(A) $3x + 5y - 6z + 3 = 0$ (B) $2x - 5y - 6z + 3 = 0$

(C) $2x + 5y - 6z + k = 0$ (D) इनमें से कोई नहीं

45. यदि A और B दो स्वतंत्र घटनाएँ हों तो

(A) P(AB') = P(A) P(B) (B) P(AB') = P(A) P(B')

(C) P(AB') = P(A') + P(B) (D) P(AB') = P(A) + P(B')

46. ताश के 52 पत्तों में से यदि एक पत्ता खींचा जाए तो इसके इक्का होने की प्रायिकता है

(A) $\frac{1}{26}$ (B) $\frac{1}{13}$ (C) $\frac{1}{52}$ (D) $\frac{1}{4}$

47. यदि $P(A) = \frac{3}{8}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ और $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ तो $P\left(\frac{A'}{B'}\right) =$

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{3}{8}$

48. यदि A और B घटनाएँ इस प्रकार हों कि

$P(A \cup B) = \frac{3}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, $P(\overline{A}) = \frac{2}{3}$ तो $P(\overline{A} \cap B)$

(A) $\frac{3}{8}$ (B) $\frac{5}{8}$ (C) $\frac{5}{12}$ (D) $\frac{1}{4}$

49. दो पासों को एक बार उछाला जाता है। पहले पासे पर सम संख्या मिलने की या कुल 8 होने की प्रायिकता है

(A) $\frac{1}{36}$ (B) $\frac{3}{36}$ (C) $\frac{11}{36}$ (D) $\frac{5}{9}$

50. यदि $p(x) = \frac{5}{15} : x = \begin{cases} 1,2,3,4,5 \\ 0, \text{अन्यथा} \end{cases}$ तो $p(x = 1)$ है

(A) $\frac{1}{15}$ (B) $\frac{2}{15}$

(C) $\frac{1}{5}$ (D) इनमें से कोई नहीं

51. $\tan\left(\sin^{-1}\frac{3}{5} + \cot^{-1}\frac{3}{2}\right)$ बराबर है

(A) $\frac{17}{6}$ (B) 34 (C) 18 (D) −18

52. $\text{cosec}^{-1}(2)$ का मुख्य मान है

(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{2\pi}{3}$ (D) $\frac{5\pi}{6}$

53. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} =$

(A) $(x-y)(y+z)(z+x)$ (B) $(x+y)(y-z)(z-x)$

(C) $(x-y)(y-z)(z+x)$ (D) $(x-y)(y-z)(z-x)$

54. यदि $\begin{vmatrix} 2x-y & 5 \\ 3 & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$ तो $x =$

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 8

55. यदि $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ x & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & z \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ तब x, y, z का मान होगा

(A) 1, 2, 3 (B) 1, 4, 3 (C) 3, 4, 0 (D) 0, 0, 1

56. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ तो AB का मान होगा

(A) $\begin{bmatrix} 6 & 26 \\ 1 & 19 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} -6 & 26 \\ -1 & 19 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 4 & 26 \\ 6 & 19 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 26 & -6 \\ 19 & 1 \end{bmatrix}$

57. $\frac{dx}{dy} = h\left(\frac{x}{y}\right)$ के रूप वाले समघातीय अवकल समीकरण को हल करने के लिए निम्नलिखित में से कौन-सा प्रतिस्थापन किया जाता है ?

(A) $y = vx$ (B) $v = yx$ (C) $x = vy$ (D) $x = v$

58. अवकल समीकरण $e^x dy + (ye^x + 2x)\, dx = 0$ का व्यापक हल है

(A) $xe^y + x^2 = C$ (B) $xe^y + y^2 = C$

(C) $ye^x + x^2 = C$ (D) $ye^x + x^2 = C$

59. दिक् अनुपात a_1, b_1, c_1 और a_2, b_2, c_2 वाली रेखाएँ समान्तर हैं यदि

(A) $a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 = 0$ (B) $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

(C) $a_1b_2 + a_2b_2 + a_1b_3$ (D) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

60. यदि $P\left(\frac{A}{B}\right) > P(A)$ तब निम्न में से कौन सही है ?

(A) P (B/A) < P(B) (B) P (A ∩ B) < P (A).P (B)

(C) P (B/A) > P(B) (D) P (B/A) = P (B)

61. माना कि A और B दो घटनाएँ हैं ताकि $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{4}$

और $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$ तो $P(A/B) =$

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$

62. दो पासों के दिक् आने की प्रायिकता है

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{5}{6}$ (D) $\frac{3}{6}$

63. एक जोड़ा पासा को फेंका जाता है। दोनों पर समरूढ़ संख्या पाने की प्रायिकता है

(A) $\frac{1}{36}$ (B) $\frac{1}{12}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) 0

64. ताश की गड्डी से यादृच्छया दो ताश निकाले जाते हैं। माना कि पाए गए इक्के की संख्या X है, तो $E(X)$ का मान होगा

(A) $\frac{1}{13}$ (B) $\frac{37}{221}$ (C) $\frac{2}{13}$ (D) $\frac{5}{13}$

65. यदि A और B दो घटनायें एक ही प्रयोग से संबंधित हो इस प्रकार कि $P(A) = 0{\cdot}4$, $P(B) = 0.8$ और $P(B/A) = 0.6$ तब $P(A/B)$

(A) 0.3 (B) 0.4 (C) 0.5 (D) 0.6

66. यदि $P(A)=\frac{3}{8}, P(B)=\frac{5}{8}$, $P(A\cup B)=\frac{3}{4}$ तो $P\left(\frac{B}{A}\right)$ है

(A) $\frac{3}{47}$ (B) $\frac{5}{49}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{1}{4}$

67. यदि $f: A \to B$ एकैक आच्छादक हो तो $n(A)$ ..... $n(B)$

(A) $\geq$ (B) $\leq$ (C) = (D) $\gtrless$

68. माना कि $A = \{1,2\}$ इस समुच्चय पर कितने द्विचर संक्रियाएँ परिभाषित हो सकते हैं ?

(A) 8 (B) 10 (C) 16 (D) 20

69. $x * y = 1 + 12x + xy$, $\forall x, y \in Q$ द्वारा परिभाषित Q पर एक द्विआधारी संक्रिया * की विवेचना करें। तब $2 * 3$ का मान होगा

(A) 31 (B) 41 (C) 43 (D) 51

70. $f: A \to B$ एक अनाच्छादक फलन होगा यदि

(A) $f(A) \subset B$ (B) $f(A) = B$

(C) $B \subset f(A)$ (D) $f(B) \subset A$

71. $\cos(\sin^{-1} x + \cos^{-1} x)$ का मान बराबर होगा

(A) 0 (B) 1 (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{\pi}{3}$

72. $\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$ का मुख्य मान है

(A) $\frac{2\pi}{3}$ (B) $\frac{4\pi}{3}$ (C) $-\frac{\pi}{3}$ (D) कोई नहीं

73. $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ का मान बराबर है

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) 1

84. यदि $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \pi$ तो $(x + y)^2$ का मान है

(A) 4 (B) 3 (C) -4 (D) -3

75. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = ?$

(A) 0 (B) $(x-y)(y-z)(z-x)$

(C) $(y-x)(y-z)(z-x)$ (D) कोई नहीं

76. $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 0 & 1+x & 1 \\ -y & 1+x & 1+x \end{vmatrix}$ का मान है

(A) xy (B) $xy(x+1)$

(C) $x(x+1)(y+1)$ (D) $xy(x+2)$

77. $\begin{vmatrix} x & x+a & x+2a \\ x+1 & x+2a & x+4a \\ x+2 & x+3a & x+6a \end{vmatrix}$ का मान है

(A) 0 (B) $(x-a)^3$ (C) $x^3 - a^3$ (D) $a^3 - x^3$

78. $\begin{vmatrix} x+1 & x+2 & x+3 \\ x+2 & x+3 & x+4 \\ x+3 & x+4 & x+5 \end{vmatrix}$ का मान है

(A) $(x-3)^2$ B) $-(3x-6)^2$

(C) 0 (D) कोई नहीं

79. यदि $y = \sec(\tan^{-1} x)$ हो, तो $\frac{dy}{dx} =$

(A) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ (B) $\frac{-x}{\sqrt{1+x^2}}$ (C) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (D) कोई नहीं

80. यदि $y = \log x^x$, तो $\frac{dy}{dx}$

(A) 1 (B) $\log x$ (C) $\log(ex)$ (D) कोई नहीं

81. $\frac{d}{dx}(x^x) =$

(A) $x.x^{x-1}$ (B) $x^x.(\log_e x + 1)$

(C) $x^x \log x$ (D) कोई नहीं

82. यदि $y = \log|x|, x \neq 0$ तो $\frac{dy}{dx} =$

(A) $\frac{1}{|x|}$ (B) $\frac{1}{x}$ (C) $\frac{-1}{x}$ (D) विद्यमान नहीं

83. $\int_0^{\pi/2} \cos x e^{\sin x} dx$ का मान है

(A) $e-1$ (B) 0 (C) 1 (D) -1

84. $\int_0^{\pi/3} \frac{\cos x}{3+4\sin x} dx = k \log\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right)$ तब $k =$

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{8}$

85. $\int_0^{\pi} \frac{1}{a+b\cos\theta} d\theta =$

(A) $\frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$ (B) $\frac{\pi}{ab}$

(C) $\frac{\pi}{a^2+b^2}$ (D) $(a+b)\pi$

86. $\int_0^{\pi^2/4} \frac{\sin\sqrt{y}}{\sqrt{y}} dy =$

(A) 1 (B) 2 (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{\pi^2}{2}$

87. यदि $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a} . \vec{b}|$ तो $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण होगा

(A) 0 (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) π

88. यदि $\vec{a}=2\vec{i}-5\vec{j}+\vec{k}$ और $\vec{b}=4\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ तो $\vec{a}.\vec{b}=$

(A) 0 (B) – 1 (C) 1 (D) 2

89. यदि $2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}, 6\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ तथा $14\vec{i}-5\vec{j}+4\vec{k}$ क्रमशः बिन्दु A, B, C के स्थिति सदिश हैं, तो

(A) A, B, C समरेखीय हैं (B) A, B, C असमरेखीय है

(C) $\vec{AB}\perp\vec{BC}$ (D) इनमें से कोई नहीं

90. तल $x+y+z=3$ के समांतर $\frac{4}{\sqrt{3}}$ दूरी पर स्थित तल का समीकरण है

(A) $x-2y-z=0$ (B) $x+y+z+1=0$

(C) $x+y+z=7$ (D) $x+y+z=3+\frac{4}{\sqrt{3}}$

91. यदि तल $kx+4y+z=0, 4x+ky+2z=0$ और $2x+2y+z=0$ एक रेखा पर एक-दूसरे को प्रतिच्छेद करें, तो k का मान होगा

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

92. यदि किसी सरल रेखा के दिक्-अनुपात $1+\lambda, 1-\lambda, 2$ हो जो y-अक्ष के साथ 60° का कोण बनाता है तो $\lambda=$

(A) $1+\sqrt{3}$ (B) $2+\sqrt{5}$ (C) $1-\sqrt{3}$ (D) $2-\sqrt{5}$

93. फलन $f(x)=\sqrt{(x-1)(3-x)}$ का परास है

(A) (1, 3) (B) (0, 1) (C) (– 2, 2) (D) कोई नहीं

94. यदि R एक संबंध है A पर जहाँ A = (1, 2, 3) और R = P(2, 2), (3, 3) (2, 3), (3, 2), (3, 1), (2, 1)} तो R है

(A) स्वतुल्य (B) सममित (C) तुल्यता (D) संक्रमक

95. यदि $f: R\to R$ इस तरह से परिभाषित हो कि $f(x)=2x+3$ तो $f^{-1}(x)=$

(A) $2x-3$ (B) $\frac{x-3}{2}$ (C) $\frac{x+3}{2}$ (D) कोई नहीं

96. $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{2}{11}=\tan^{-1}$ a, 'a' का मान निम्न में से कौन है ?

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) 1

97. $\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}=?$

(A) $2\tan^{-1}x$ (B) $2\cos^{-1}x$ (C) $2\sin^{-1}x$ (D) कोई नहीं

98. $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{2}{11}=\tan^{-1}$ a, 'a' का मान निम्न में से कौन है ?

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) 1

99. $\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}=?$

(A) $2\tan^{-1}x$ (B) $2\cos^{-1}x$ (C) $2\sin^{-1}x$ (D) कोई नहीं

100. यदि A एक उत्क्रमणीय आव्यूह है जिसका क्रम $n\times n$ है तो $|\text{adj}\,A|=$

(A) $n|A|$ (B) $|A|^{n-1}$ (C) $|A|$ (D) $|A|^n$

खण्ड–ब (गैर-वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न संख्या 1 से 30 लघु उत्तरीय हैं। किन्हीं 15 प्रश्नों के उत्तर दें। प्रत्येक के लिए 2 अंक निर्धारित है। $15\times 2=30$

1. जाँच कीजिए कि क्या R में, $R=\{(a,b): a\le b^3\}$ द्वारा परिभाषित संबंध स्वतुल्य, सममित अथवा संक्रमक है ?

2. दिखाएँ कि {1, 2} पर द्विआधारी संक्रियाओं की संख्या जिसके लिए 1 तत्समक अवयव है तथा 2 का प्रतिलोम 2 है, केवल एक होता है।

3. सिद्ध करें : $\cos\left[\tan^{-1}\left\{\sin(\cot^{-1}x)\right\}\right]=\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+2}}$

4. सिद्ध करें : $\sin\cot^{-1}\tan\cos^{-1}x=x.$

5. यदि $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$ तो जाँच करें कि $A^2-4A-5I=0.$

6. यदि $A=\begin{bmatrix}3&2\\1&1\end{bmatrix}$, a और b का मान निकालें ताकि $A^2+aA+bI=O.$ इससे A^{-1} निकालें।

7. यदि $A=\begin{bmatrix}1&0\\-1&7\end{bmatrix}$ और $I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ तो k का मान निकालें जबकि $A^2=8A+kI.$

8. (1, 2) तथा (3, 6) को मिलाने वाली रेखा का समीकरण सारणिक का प्रयोग कर निकालें।

9. फलन $f(x)$ को $x=a$ पर संतता जाँच करें, जहाँ

$$f(x)=\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}, x\neq 0$$
$$=\frac{b^2-a^2}{2}, x=0$$

10. यदि $y=(\sin^{-1}x)^2$, सिद्ध करें कि $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}=x\frac{dy}{dx}+2$

11. $\theta=\frac{\pi}{4}$ पर वक्र $x=a\cos^3x, y=a\sin^3x$ के अभिलम्ब का ढाल ज्ञात करें।

12. जाँच करें कि क्या फलन $x^{1/x}(x>0)$ का महत्तम या न्यूनतम मान है और यदि हो तो उसे निकालें।

13. मान ज्ञात कीजिए : $\int\frac{e^{\tan^{-1}x}}{(1+x^2)^2}dx.$

14. योगफल की सीमा के रूप में $\int_1^3(2x+3)\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

15. $x=0$ एवं $x=2\pi$ तथा वक्र $y=\sin x$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

16. दिखावें कि $y=a\cos(\log x)+b\sin(\log x)$ अवकलन समीकरण $x^2.\frac{d^2y}{dx^2}+x.\frac{dy}{dx}+y=0$ का एक हल है।

17. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+2\tan x.y=\sin x$ को हल करें। इसका विशेष हल भी ज्ञात करें यदि $y=0$ जब $x=\frac{\pi}{3}$

18. सि) करें कि $|\vec{a}\times\vec{b}|^2=\begin{vmatrix}\vec{a}.\vec{a}&\vec{a}.\vec{b}\\\vec{a}.\vec{b}&\vec{b}.\vec{b}\end{vmatrix}.$

19. दिखाएँ कि तीन बिन्दुएँ $-2\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k}$, $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$, $7\hat{i}-\hat{k}$ सरेख है।

20. दो तल $3x-y+2z-4=0$ तथा $x+y+z-2=0$ के छेदन तथा बिन्दु (2, 2, 1) से होकर गुजरने वाली तल का समीकरण ज्ञात करें।

21. रेखा $\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{4}$ तथा तल $2x+y-3z+4=0$ के बीच का कोण ज्ञात करें।

22. निम्नलिखित पदों की परिभाषा लिखें :
(i) इष्टतमकारी समस्या (ii) उद्देश्य फलन।

23. एक पासा के फेंकने में यदि सम संख्या आती हो, तो उसके 2 से अधिक होने की क्या प्रायिकता है ?

24. एक द्विपद चर X का माध्य और प्रसरण क्रमशः 2 तथा 1 हैं। X के 1 से अधिक मान प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात करें।

25. ज्ञात करें : $\int\frac{x^4+1}{x^2+1}dx$.

26. फलन $\sin^{-1}(\cos x)$ को x के सापेक्ष अवकलित करें।

27. माना कि $A=\{a,b,c\}$। A पर द्विआधारी संक्रियाओं की संख्या निकालें।

28. सिद्ध करें कि $|\vec{a}\times\vec{b}|^2=\begin{vmatrix}\vec{a}.\vec{a} & \vec{a}.\vec{b}\\ \vec{a}.\vec{b} & \vec{b}.\vec{b}\end{vmatrix}$.

29. दो तल $3x-y+2z-4=0$ तथा $x+y+z-2=0$ के छेदन तथा बिन्दु (2, 2, 1) से होकर गुज़रने वाली तल का समी॰ ज्ञात करें।

30. एक कक्षा में 40% छात्र गणित पढ़ते हैं, 25% जीव विज्ञान पढ़ते हैं एवं 15% गणित एवं जीव विज्ञान दोनों पढ़ते हैं। एक छात्र को यादृच्छिक (random) चुना गया। प्रायिकता ज्ञात करें कि वह छात्र
(i) गणित पढ़ता है यदि दिया हो कि वह जीव विज्ञान पढ़ रहा है।
(ii) जीव विज्ञान पढ़ता है यदि दिया हो कि वह गणित पढ़ता रहा है।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न संख्या 31 से 38 दीर्घ उत्तरीय प्रश्न हैं। किन्हीं 4 प्रश्नों के उत्तर दें। प्रत्येक के लिए 5 अंक निर्धारित हैं। $4\times5=20$

31. आव्यूह $\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 5 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$ का प्रतिलोम ज्ञात करें।

32. यदि $x=a\left(\cos t+\log\tan\frac{t}{2}\right)$, $y=a\sin t$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ और $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए।

33. फलन $f(x)=\sin x+\cos x$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ के लिए रोले के प्रमेय को सत्यापित करें।

34. समाकलित करें : $\int\frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x}dx$

35. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

36. सदिश $2\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}$ और $\lambda\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ के योगफल के अनुदिश इकाई सदिश तथा सदिश $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ का अदिश गुणनफल का मान 1 है। λ का मान ज्ञात करें।

37. निम्नांकित LPP का आलेखीय हल निकालें :
अधिकतमीकरण करें $Z=3x+2y$
जबकि $x+2y\le10$
$3x+y\le15$
$x,y\ge0$

38. एक बीमा कंपनी 2000 स्कूटर चालकों, 4000 कार चालकों और 6000 ट्रक चालकों का बीमा करती है। दुर्घटनाओं की प्रायिकताएँ क्रमशः 0.01, 0.03 और 0.15 है। बीमाकृत व्यक्तियों (चालकों) में से एक दुर्घटनाग्रस्त हो जाता है। उस व्यक्ति के स्कूटर चालक होने की प्रायिकता क्या है ?

उत्तर

खण्ड–अ (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

1. (D)	2. (D)	3. (D)	4. (C)	5. (D)	6. (D)
7. (C)	8. (A)	9. (A)	10. (A)	11. (B)	12. (B)
13. (A)	14. (A)	15. (C)	16. (C)	17. (C)	18. (B)
19. (D)	20. (C)	21. (C)	22. (A)	23. (D)	24. (B)
25. (D)	26. (A)	27. (A)	28. (D)	29. (B)	30. (A)
31. (A)	32. (B)	33. (B)	34. (A)	35. (A)	36. (D)
37. (C)	38. (B)	39. (B)	40. (A)	41. (D)	42. (A)
43. (B)	44. (C)	45. (B)	46. (C)	47. (C)	48. (C)
49. (D)	50. (A)	51. (A)	52. (B)	53. (D)	54. (B)
55. (B)	56. (A)	57. (C)	58. (C)	59. (D)	60. (C)
61. (C)	62. (C)	63. (A)	64. (C)	65. (A)	66. (C)
67. (C)	68. (C)	69. (A)	70. (A)	71. (A)	72. (C)
73. (D)	74. (A)	75. (B)	76. (D)	77. (A)	78. (C)
79. (A)	80. (C)	81. (B)	82. (B)	83. (A)	84. (C)
85. (A)	86. (B)	87. (C)	88. (B)	89. (A)	90. (B,C)
91. (B,D)	92. (B,D)	93. (D)	94. (D)	95. (B)	96. (C)
97. (A)	98. (C)	99. (A)	100. (B)		

खण्ड–ब (गैर-वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

लघु उत्तरीय प्रश्न

1. दिया है, A = R = वास्तविक संख्याओं का समुच्चय तथा $R=\{(a,b):a\le b^3\}$

स्वतुल्य संबंध के लिए, हम जानते हैं कि $\frac{1}{2}\not\le\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

$\Rightarrow$ $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\notin R$, अतः R, स्वतुल्य संबंध नहीं है।

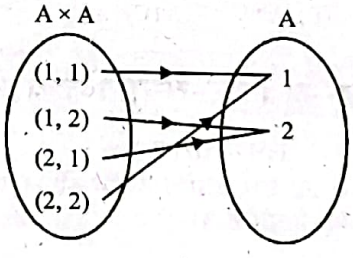
सममित संबंध के लिए, चूँकि $1<2^3\therefore(1,2)\in R$ लेकिन $2\not<1^3\Rightarrow\therefore(2,1)\in R$ अतः R सममित संबंध नहीं है।

संक्रमक संबंध के लिए, चूँकि $3<\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{27}{8}\therefore\left(3,\frac{3}{2}\right)\in R$ तथा $\frac{3}{2}<\left(\frac{6}{5}\right)^3=\frac{216}{125}$

$\therefore$ $\left(\frac{3}{2},\frac{6}{5}\right)\in R$ लेकिन $3>\left(\frac{6}{5}\right)^3$

$\therefore$ $\left(3,\frac{6}{5}\right)\notin R$ अतः R, संक्रमक संबंध नहीं है। इसलिए R, स्वतुल्य संबंध, सममित संबंध तथा संक्रमक संबंध में से कोई नहीं है।

2. माना कि $A=\{1,2\}$ तथा A पर द्विआधारी संक्रिया $*$ है।
हम जानते हैं कि A पर द्विआधारी संक्रिया, $A\times A\to A$ में फलन होता है।
अब, $A\times A=\{1\,2\}\times\{1,2\}=\{(1,1)\,(1,2)\,(2,1)\,(2,2)\}$
$\therefore *\{(1,1)\,(1,2)\,(2,1)\,(2,2)\}\to\{1,2\}$ में एक फलन है।
चूँकि द्विआधारी संक्रिया $*$ के लिए तत्समक अवयव 1 है।
$\therefore$ $1*1=1, 1*2=2, 2*1=2$



चूँकि 2 का प्रतिलोम 2 है, इसलिए 2 * 2 = 1
अतः अभीष्ट द्विआधारी संक्रिया की संख्या 1 है।

3. $\text{L.H.S.} = \cos\left[\tan^{-1}\left\{\sin(\cot^{-1}x)\right\}\right]$

माना $\cot^{-1}x = \theta \Rightarrow x = \cot\theta$

$\therefore \quad \text{cosec}\,\theta = \sqrt{1+\cot^2\theta} = \sqrt{1+x^2}$

$\therefore \quad \sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

अब $\text{L.H.S.} = \cos[\tan^{-1}(\sin\theta)] = \cos\left[\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right]$

फिर माना कि $\tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \alpha \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$\therefore \quad \sec^2\alpha = 1+\tan^2\alpha = 1+\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{x^2+2}{x^2+1}$

$\Rightarrow \quad \sec\alpha = \sqrt{\dfrac{x^2+2}{x^2+1}} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2+2}}$

अब $\text{L.H.S.} = \cos\alpha = \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2+2}}$

4. [इस तरह के प्रश्नों में L.H.S के अंतिम व्यंजक से शूरू करना चाहिए और इसे उसी त्रिकोणमितीय निष्पत्ती में बदलते जाना चाहिए जिसका प्रतिलोम इसके ठीक पहले है। उदाहरण के लिए $\sin^{-1}(f(x))$ होने पर $f(x)$ को $\sin\theta$ के रूप में व्यक्त करें]

माना कि $\cos^{-1}x = \alpha$ तो $x = \cos\alpha$

$\therefore \tan\alpha = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

$\text{L.H.S.} = \sin\cot^{-1}\tan\cos^{-1}x$

$= \sin\cot^{-1}\tan\alpha$

$= \sin\cot^{-1}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ ...(1)

माना कि $\cot^{-1}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \phi,$

तो $\cot\phi = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} \quad \therefore \sin\phi = x$

अब, (1) से, $\text{L.H.S.} = \sin\phi = x = \text{R.H.S.}$

5. दिया आव्यूह है $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$

अब $A\times A = A^2 = \begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$

$A^2 = A\times A$

$= \begin{bmatrix}1\times1+2\times2+2\times2 & 2\times1+1\times2+2\times2 & 2\times1+2\times2+1\times2\\ 2\times1+1\times2+2\times2 & 2\times2+1\times1+2\times2 & 2\times2+2\times1+2\times1\\ 1\times2+2\times2+1\times2 & 2\times2+1\times2+2\times1 & 2\times2+2\times2+1\times1\end{bmatrix}$

$A^2 = \begin{bmatrix}9 & 8 & 8\\ 8 & 9 & 8\\ 8 & 8 & 9\end{bmatrix}$ ...(i)

अब $4A = 4\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix} \quad \therefore 4A = \begin{bmatrix}4 & 8 & 8\\ 8 & 4 & 8\\ 8 & 8 & 4\end{bmatrix}$ ...(ii)

जैसा कि हम जानते हैं $I = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}; \; 5I = \begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$ ...(iii)

चूँकि समीकरण (i), (ii) और (iii)

$= \begin{bmatrix}9 & 8 & 8\\ 8 & 9 & 8\\ 8 & 8 & 9\end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix}4 & 8 & 8\\ 8 & 4 & 8\\ 8 & 8 & 4\end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}9 & 8 & 8\\ 8 & 9 & 8\\ 8 & 8 & 9\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}9 & 8 & 8\\ 8 & 9 & 8\\ 8 & 8 & 9\end{bmatrix} = 0$

अतः $A^2 - 5I - 4A = 0$ सिद्ध हुआ।

यहाँ $A = \begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix} = 3\times1 - 1\times2 = 1 \neq 0$

$\Rightarrow$ A^{-1} का अस्तित्व है।

साथ ही $A^2 = A.A = \begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}9+2 & 6+2\\ 3+1 & 2+1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}11 & 8\\ 4 & 3\end{bmatrix}$

अब, $A^2 + aA + bI = 0$

$\Rightarrow \begin{bmatrix}11 & 8\\ 4 & 3\end{bmatrix} + a\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix}11+3a+b & 8+2a\\ 4+a & 3+a+b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

$\therefore \quad 11+3a+b = 0;\; 8+2a = 0$
$4+a = 0;\; 3+a+b = 0$

$\Rightarrow \quad a = -4;\; b = 1$

Second part :

(1) से, $\quad A^2 - 4A + I = 0$

$\Rightarrow \quad I = 4A - A^2$

$\Rightarrow \quad IA^{-1} = (4A - A^2)A^{-1}$ [A^{-1} से गुणा करने पर]

$\Rightarrow \quad A-1 = 4I - A$ [$\because AA^{-1} = I$]

$= 4\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{bmatrix}$

7. हमें पता है $A^2 = A.A$

$= \begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+0 & 0+0\\ -1-7 & 0+49\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ -8 & 49\end{bmatrix}$

$\therefore \quad A^2 - 8A$

$= \begin{bmatrix}1 & 0\\ -8 & 49\end{bmatrix} - 8\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ -8 & 49\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-8 & 0\\ 8 & -56\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}1-8 & 0+0\\ -8+8 & 49-56\end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} = -7\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -7I$$

इस प्रकार तुलना करने पर $R = -7$

8. माना कि $A \equiv (1, 2), B \equiv (3, 6)$

माना कि बिन्दुओं $A(1, 2)$ तथा $B(3, 6)$ को मिलानेवाली रेखा पर $P(x, y)$ कोई स्वतंत्र बिन्दु है, तो बिन्दुएँ P, A, B संरेख होगी।

$$\therefore \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

या, $x(2-6) - y(1-3) + 1(6-6) = 0$ [पहले row के अनुदिश विस्तार करने पर]

या, $4x - 2y = 0$ या, $2x - y = 0$

9. बायाँ पक्ष $= \underset{x\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$= \underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{-a\sin ax + b\sin bx}{2x}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{-a^2\cos ax + b^2\cos bx}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

इसी तरह

दायाँ पक्ष $= \underset{x\to 0^+}{\text{Lt}} \dfrac{\cos ax - \cos bx}{x^2} = \dfrac{b^2 - a^2}{2}$

और $f(0) = \dfrac{b^2 - a^2}{2}$

यहाँ $\underset{x\to 0^-}{\text{Lt}} f(x) = \underset{x\to 0^+}{\text{Lt}} f(x) = f(0) = \dfrac{b^2 - a^2}{2}$

अतः $f(x), x = 0$ पर संतत है।

10. दिया है, $y = (\sin^{-1})^2$ ...(1)

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2\sin^{-1}x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

या, $\sqrt{1-x^2}\dfrac{dy}{dx} = 2\sin^{-1}x$

दोनों तरफ वर्ग करने पर हमें मिलता है,

$$(1-x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4(\sin^{-1}x)^2 = 4y \quad [(1) \text{ से}]$$

पुनः x के सापेक्ष अवकलित करने पर हमें मिलता है,

$$(1-x^2)\,2\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + (-2x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4\frac{dy}{dx}$$

दोनों तरफ $2\dfrac{dy}{dx}$ से भाग देने पर हमें मिलता है,

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} = x\cdot\frac{dy}{dx} + 2$$

11. यहाँ $\dfrac{dr}{d\theta} = -3a\cos^2\theta.\sin\theta$

$$\frac{dy}{d\theta} = 3a\sin^2\theta.\cos\theta$$

अब $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \dfrac{3a\sin^2\theta.\cos\theta}{-3a\cos^2\theta.\sin\theta}$

अभिलम्ब की ढाल $= -\dfrac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)} = \dfrac{1}{\tan\theta} = \cot\theta$

θ पर अभिलम्ब का ढाल $= \dfrac{\pi}{2} = \cot\dfrac{\pi}{4} = 1$

12. माना कि $y = x^{1/x}\ (x > 0)$ ...(1)

$$\therefore \log y = \frac{1}{x}\log x = \frac{\log x}{x} \quad ...(2)$$

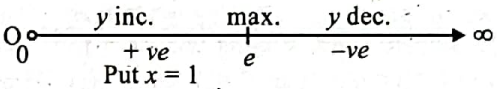
दोनों तरु x के सापेक्ष अवकलित करने पर हमें मिलता है,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{x\cdot\frac{1}{x} - \log x\cdot 1}{x^2} = \frac{1-\log_e x}{x^2} \quad ...(3)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y\left(\frac{1-\log x}{x^2}\right) = \frac{x^{1/x}}{x^2}(1-\log x) \quad ...(4)$$

यहाँ $x > 0 \ \therefore x^{1/x} > 0$ तथा $x^2 > 0$,

इसलिए, $\dfrac{dy}{dx}$ अर्थात् $(1 - \log_e x)$ के लिए चिह्न योजना होगा



Put $x = 1$

y का मान $x = e$ पर महत्तम है।

y का संगत महत्तम मान $= e^{1/e}$

13. दिया है $I = \int \dfrac{e^{\tan^{-1}x}}{(1+x^2)^2}dx;\ \tan^{-1}x = z,$

जिससे कि $\dfrac{1}{1+x^2}dx = dz$

$$I = \int e^z dz = e^z + c = e^{\tan^{-1}x + c} \quad \textbf{Ans.}$$

14. परिभाषा से, ...(1)

जहाँ, $nh = b - a$ तथा $n \to \infty$

यहाँ, $f(x) = 2x + 3, a = 1, b = 3 \quad \therefore nh = b - a = 3 - 1 = 2$

साथ ही $f(a + rh) = f(1 + rh) = 2(1 + rh) + 3 = 5 + 2rh$

(1) से, $\int_1^3 (2x+3)dx = \lim\limits_{h\to 0} h\sum\limits_{r=1}^{n} f(a+rh) = \lim\limits_{h\to 0} h\sum\limits_{r=1}^{n}(5+2rh)$

$$= \lim_{h\to 0}\left(h\sum_{r=1}^{n}5 + 2h^2\sum_{r=1}^{n}r\right) = \lim_{h\to 0}[h.5n + 2h^2(1+2+...+n)]$$

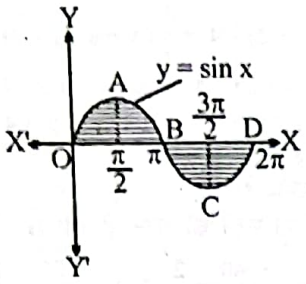
$$= \lim_{h\to 0}\left[5nh + 2h^2\frac{n(n+1)}{2}\right] = \lim_{h\to 0}[5nh + 2h^2(nh+h)]$$

$\lim\limits_{h\to 0}[10 + 2(2+h)] = 14 \quad [\because nh = 2]$

15. सर्वप्रथम, $x = 0$ तथा $x = 2\pi$ के बीच वक्र $y = \sin x$ खींचे तथा मुख्य सीमाएँ लेकर समाकलन करें। समाकलन के लिए समीकरण $y = |\sin x|$ का उपयोग करें।

वक्र $y = \sin x$ का ग्राफ आकृति अनुसार खींचा जा सकता है।

$\therefore$ अभीष्ट क्षेत्रफल = OABO का क्षेत्रफल + BCDB का क्षेत्रफल



$= \int_0^{\pi} |\sin x|\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} |\sin x|\,dx$

$= \int_0^{\pi} \sin x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x)\,dx$

($\because \sin x \geq 0$ जब $x \in [0, \pi]$)

तथा $\sin x \leq 0$ जब $x \in [\pi, 2\pi]$

$= [-\cos x]_0^{\pi} + [\cos x]_{\pi}^{2\pi} = -\cos\pi + \cos 0 + \cos 2\pi - \cos\pi$

$= -(-1) + 1 + 1 - (-1) = 4$ वर्ग इकाई

16. $y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$ ...(i)

$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-a\sin(\log x)}{x} + \frac{b\cos(\log x)}{x}$

$\Rightarrow \quad x.\frac{dy}{dx} = -a\sin(\log x) + b\cos(\log x)$ ...(ii)

पुनः अवकलन करने पर

$\frac{x.d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = \frac{-a\cos(\log x)}{x} - \frac{b\sin(\log x)}{x}$

$\Rightarrow \quad x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = -[a\cos(\log x) + b\sin(\log x)]$

अतः $y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$ दिये गये अवकलन समीकरण का एक हल है।

17. दिया गया अवकल समीकरण है :

$\frac{dy}{dx} + 2\tan x.y = \sin x$ ...(1)

यह $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ के रूप का रैखिक अवकल समीकरण है,

जहाँ $P = 2\tan x$ तथा $Q = \sin x$

अब I.F. $= e^{\int P dx} = e^{\int 2\tan x dx} = e^{2\log\sec x} = e^{\log\sec^2 x} = \sec^2 x$

$\therefore$ दिए गए अवकल समीकरण का हल होगा,

$y \cdot \sec^2 x = \int \sin x \cdot \sec^2 x\,dx + c = \int \tan x \cdot \sec x\,dx + c = \sec x + c$

$\Rightarrow y = \cos x + \cos^2 x$

यही दिए गए अवकल समीकरण का अभीष्ट हल है।

18. माना कि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण θ है।

अतः: $|\vec{a}\times\vec{b}|^2 = (\vec{a}\times\vec{b}).(\vec{a}\times\vec{b}) = ab\sin\theta\hat{n}.(ab\sin\theta)\hat{n}$

$= a^2b^2\sin^2\theta\,\hat{n}.\hat{n} = a^2b^2\sin^2\theta = a^2b^2(1-\cos^2\theta)$

$= a^2b^2 - a^2b^2\cos^2\theta = a^2b^2 - (ab\cos\theta)^2$

$= a^2b^2 - \vec{a}.\vec{b} = (\vec{a}.\vec{a})(\vec{b}.\vec{b}) - \vec{a}.\vec{b}$

$= \begin{vmatrix} \vec{a}.\vec{a} & \vec{a}.\vec{b} \\ \vec{a}.\vec{b} & \vec{b}.\vec{b} \end{vmatrix}$ सिद्ध हुआ।

19. माना कि O मूल बिन्दु है तथा दी हुई तीन बिन्दुएँ A, B, C हैं।

तो $\vec{OA} = -2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$; $\vec{OB} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$; $\vec{OC} = 7\hat{i} - \hat{k}$

अब, $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$

$= (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) - (-2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}) = 3\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$

$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = (7\hat{i} - \hat{k}) - (-2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}) = 9\hat{i} - 3\hat{j} - 6\hat{k}$

अब, $\vec{AB}\times\vec{AC} = (3\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k})\times(9\hat{i} - 3\hat{j} - 6\hat{k})$

$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -1 & -2 \\ 9 & -3 & -6 \end{vmatrix} = (6-6)\hat{i} - (-18+18)\hat{j}(-9+9)\hat{k} = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{AB} \parallel \vec{AC}$

लेकिन $\vec{AB}$ और $\vec{AC}$ में उभयनिष्ठ बिन्दु A है।

$\therefore$ AB तथा AC एक ही रेखा में हैं।

अतः बिन्दुएँ A, B, C संरेख हैं।

20. दो तलों $3x - y + 2z - 4 = 0$ तथा $x + y + z - 2 = 0$ के छेदन से होकर गुजरने वाली तल का समी॰

$3x - y + 2z - 4 + \lambda(x + y + z - 2) = 0$ ...(i)

(i) बिन्दु (2, 2, 1) से होकर गुजरती है ।

$\therefore \quad 6 - 2 + 2 - 4 + \lambda(2 + 2 + 1 - 2) = 0$

या, $\quad 2 + \lambda(3) = 0 \quad \therefore \lambda = -\frac{2}{3}$

समी॰ (i) में λ का मान रखने पर

$3x - y + 2z - 4 - \frac{2}{3}(x + y + z - 2) = 0$

या, $3(3x - y + 2z - 4) - 2(x + y + z - 2) = 0$

या, $9x - 3y + yz - 12 - 2x - 2y - 2z + 4 = 0$

या, $7x - 5y + 4z - 8 = 0$

यही अभीष्ट समीकरण है।

21. दी हुई रेखा तथा दिए हुए तल पर लम्ब के दिक्-अनुपात क्रमशः 3, 2, 4 तथा 2, 1, −3 है। यदि दिए हुए तल तथा दी हुई रेखा के बीच का न्यूनकोण कोण θ है, तो

$\sin\theta = \left|\frac{3\times2 + 2\times1 + 4\times(-3)}{\sqrt{9+4+16}\sqrt{4+1+9}}\right| = \frac{4}{\sqrt{406}}$

अतः $\theta = \sin^{-1} = \left(\frac{4}{\sqrt{406}}\right)$

22. **(i) इष्टतमकारी समस्या** (Optimization problem)—एक समस्या जिसमें एक या अधिक चरों के एक विशिष्ट फलन को इष्टतम (महत्तम या न्यूनतम) करना होता है, जहाँ चर या तो स्वतंत्र होते हैं या एक या अधिक समीकरणों या असमीकरणों को संतुष्ट करते हैं, इष्टतमकारी समस्या कहलाता है।

(ii) उद्देश्य फलन (Objective function)—वह विशिष्ट फलन जिसको इष्टतम (महत्तम या न्यूनतम) बनाना है, उद्देश्य फलन कहलाता है।

23. माना कि A = पासे पर सम संख्या आने की घटना = {2, 4, 6}

B = 2 से बड़ा होने की घटना = {4, 6}

$A \cap B = \{4, 6\}$

इसी तरह, $n(A \cap B) = 2$

$n(s) = n(A) = 3$

$\therefore \quad P\left(\frac{B}{A}\right)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{2}{3}$

24. दिया है, माध्य $np=2$

तथा प्रसरण $npq=1 \quad \Rightarrow 2q=1 \Rightarrow q=1/2$

$\therefore \; p=1-q=1-1/2=\frac{1}{2}$

$\therefore \; n=4$

$\therefore$ द्विपद बंटन है, $(q+p)^4$ अर्थात् $\{(1/2)+(1/2)\}^4$

अब, $P(X>1)=1-\{P(X=0)+P(X=1)\}$

$=1-(1/2)^4-{}^4C_1\cdot(1/2)^4$

$=1-(5/2^4)=11/16$

25. $\int\frac{x^4+1}{x^2+1}dx=\int\frac{(x^4+1)+2}{x^2+1}dx=\int\left[\frac{x^4-1}{x^2+1}+\frac{2}{x^2+1}\right]dx$

$=\int\left[x^2-1+\frac{2}{x^2+1}\right]dx=\frac{1}{x}x^3-x+2\tan^{-1}x+c.$

26. माना कि $y=\sin^{-1}(\cos x)$

$u=\cos x$ रखें ताकि $y=\sin^{-1}u$

$\therefore \; \frac{du}{dx}=-\sin x$ तथा $\frac{dy}{du}=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$

अब $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

$=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot(-\sin x)$

$=\frac{-\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}=\frac{-\sin x}{\sin x}=-1$

27. $m=A$ में अवयवों की संख्या $=3$

$\therefore \quad n(A\times A)=3\times 3=3^2=9$

$\therefore$ A पर द्विआधारी संक्रियाओं की संख्या

$=A\times A$ से A में फलनों की संख्या

$=(n(A))^{n(A\times A)}=3^9=19683$

28. माना कि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण θ है।

अतः $|\vec{a}\times\vec{b}|^2=(\vec{a}\times\vec{b}).(\vec{a}\times\vec{b})=ab\sin\theta\hat{n}.(ab\sin\theta)\hat{n}$

$=a^2b^2\sin^2\theta\,\hat{n}.\hat{n}=a^2b^2\sin^2\theta=a^2b^2(1-\cos^2\theta)$

$=a^2b^2-a^2b^2\cos^2\theta=a^2b^2-(ab\cos\theta)^2$

$=a^2b^2-\vec{a}.\vec{b}=(\vec{a}.\vec{a})(\vec{b}.\vec{b})-\vec{a}.\vec{b}$

$=\begin{vmatrix}\vec{a}.\vec{a} & \vec{a}.\vec{b}\\ \vec{a}.\vec{b} & \vec{b}.\vec{b}\end{vmatrix}$ सिद्ध हुआ।

29. दो तलों $3x-y+2z-4=0$ तथा $x+y+z-2=0$ के छेदन से होकर गुजरने वाली तल का समी॰

$3x-y+2z-4+\lambda(x+y+z-2)=0 \qquad \ldots(i)$

(i) बिन्दु (2, 2, 1) से होकर गुजरती है ।

$\therefore \quad 6-2+2-4+\lambda(2+2+1-2)=0$

या, $\quad 2+\lambda(3)=0 \qquad \therefore \; \lambda=-\frac{2}{3}$

समी॰ (i) में λ का मान रखने पर

$3x-y+2z-4-\frac{2}{3}(x+y+z-2)=0$

या, $\quad 3(3x-y+2z-4)-2(x+y+z-2)=0$

या, $\quad 9x-3y+yz-12-2x-2y-2z+4=0$

या, $\quad 7x-5y+4z-8=0$

यही अभीष्ट समी॰ है।

30. माना कि M गणित पढ़ने की घटना है और B जीव विज्ञान पढ़ने की

प्रश्नानुसार $P(M)=\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$, $P(B)=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$

तथा $P(M\cap B)=\frac{15}{100}=\frac{3}{20}$

(i) अभीष्ट प्रायिकता $=P\left(\frac{M}{B}\right)=\frac{P(M\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{4}}=\frac{3}{5}$

(ii) अभीष्ट प्रायिकता $=P\left(\frac{B}{M}\right)=\frac{P(M\cap B)}{P(M)}=\frac{\frac{3}{20}}{\frac{2}{5}}=\frac{3}{8}$

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

31. दिया है आव्यूह $A=\begin{vmatrix}2 & 0 & -1\\ 5 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix}$

हम जानते हैं कि $A=IA$; $\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 5 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}A$

$R_2\to R_2-2R_1$

$\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}A$

$R_1\leftrightarrow R_2$

$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}A$

$R_2\to R_2-2R_1$ करने पर

$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & -2 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 5 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}A$

$R_2\leftrightarrow R_3$ करने पर,

$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & -2 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 5 & -2 & 0\end{bmatrix}A$

$R_3\to R_3-2R_2$ करने पर,

$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -5 & -2 & 2\end{bmatrix}A$

$R_1\leftrightarrow R_1-R_2$

$$\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&1&-1\\0&0&1\\5&-2&1\end{bmatrix}A$$

$R_1 \leftrightarrow R_1 + R_3$ करने पर,

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-1&1\\0&0&1\\5&-2&2\end{bmatrix}A$$

$R_2 \leftrightarrow R_2 - 3R_3$ करने पर,

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-1&-1\\-15&6&-5\\5&-2&2\end{bmatrix}A$$

चूँकि $I = BA$

जहाँ $B=\begin{bmatrix}3&-1&-1\\-15&6&-5\\5&-2&2\end{bmatrix}$.

$$\therefore \quad A^{-1}=B=\begin{bmatrix}3&-1&-1\\-15&6&-5\\5&-2&2\end{bmatrix}$$

32. $y = a\sin t$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = a\cdot\cos t$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -a\sin t$$

और $x = a[\cos t + \log(\tan t/2)$

दोनों तरफ x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dx}{dt} = a\left[-\sin t + \frac{1}{\tan t/2}\times\frac{d\tan(t/2)}{dx}\right]$$

$$= a\left[-\sin t + \frac{1}{\tan t/2}\cdot\sec^2 t/2\cdot\frac{1}{2}\right]$$

$$= a\left[-\sin t + \frac{1}{\tan t/2\cdot\cos^2 t/2}\right]$$

$$= a\left[-\sin t + \frac{1}{2\dfrac{\sin t/2}{\cos t/2}\cdot\cos^2 t/2}\right]$$

$$= a\left[-\sin t + \frac{1}{2\dfrac{\sin t/2}{\cos t/2}\cdot\cos^2 t/2}\right]$$

$$= a\left[-\sin t + \frac{1}{\sin t}\right]$$

$$= a\frac{(1-\sin^2 t)}{\sin t} = a\frac{\cos^2 t}{\sin t}$$

और $y = a\sin t$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = a\cos t$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a\cos t}{\frac{a\cos^2 t}{\sin t}} = \frac{\cos t}{\cos^2 t}\cdot\sin t = \tan t$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \tan t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sec^2 t\times\frac{dt}{dx}$$

$$= \sec^2 t\times\frac{\sin t}{a\cos^2 t}$$

$$= \frac{\sec^4 t\cdot\sin t}{a}.$$ **Ans.**

33. यहाँ $f(x) = \sin x + \cos x,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ...(1)

$\sin x$ तथा $\cos x$ दोनों अन्तराल $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ में संतत (continuous) हैं तथा $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ में अवकलनीय (differentiable) है।

$\therefore f(x)$ अन्तराल $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ में संतत (continuous) है तथा $f(x)$ अन्तराल $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ में अवकलनीय (differentiable) है।

साथ ही $f(0) = \sin 0 + \cos 0 = 1$

तथा $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = 1$

$\therefore f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

अतः फलन $f(x)$ के लिए अन्तराल $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ में रोले के प्रमेय के सभी शर्त संतुष्ट है।

$\therefore c\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ का अस्तित्व है ताकि $f'(c) = 0$

अब (1) से $f'(x) = \cos x - \sin x$

$\therefore f'(c) = 0 \Leftrightarrow \cos c = \sin c \quad \Rightarrow \tan c = 1 \quad \Rightarrow c = \frac{\pi}{4}$

स्पष्टतः $c = \frac{\pi}{4}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. ताकि $f'(c) = 0$

अतः रोले का प्रमेय सत्यापित हो गया।

34. दिया है, $I = \int\frac{e^x(1+\sin x)}{(1+\cos x)}dx = \int\frac{e^x\left(1+2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx$

$$= \int e^x\left[\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}} + \frac{2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right]dx$$

ONE PRAKASHAN, PATNA

$$= \int e^x \left[\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2} + \tan\frac{x}{2}\right]dx$$

$$= \int e^x \left(\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\right)dx + \int e^x \tan\frac{x}{2}dx$$

अब खण्डशः समाकलन करने पर

$$= \frac{1}{2}\left[e^x \int \sec^2\frac{x}{2}dx - \int \frac{d\,e^x}{dx}\int \sec^2\frac{x}{2}dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}e^x \frac{\tan\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\int e^x \frac{\tan\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}}dx + \int e^x \tan\frac{x}{2}dx$$

$$= e^x \tan\frac{x}{2} - \int e^x \tan\frac{x}{2}dx + \int e^x \tan\frac{x}{2}dx$$

$$\boxed{I = e^x \tan\frac{x}{2} + c}$$ **Ans.**

35. सर्वप्रथम, प्रथम चतुर्थांश में क्षेत्रफल ज्ञात करें और तब 4 से गुणा करें। जैसा कि एक चतुर्थांश में दीर्घवृत्त का एक-चौथाई हिस्सा होता है।

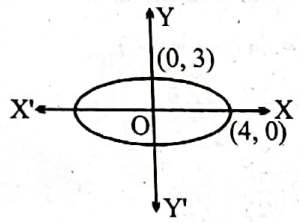
दिया गया वक्र दीर्घवृत्त है जिसका केन्द्र (0, 0) है तथा X-अक्ष व Y-अक्ष के परितः सममित है। ($\because x$ तथा y की घातें सम हैं)

$\therefore$ दीर्घवृत्त द्वारा घिरा क्षेत्रफल

= 4 × (प्रथम चतुर्थांश में छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल)

($\because$ सममित द्वारा)

$$= 4\times\int_{x=a}^{x=b} |y|\,dx$$



$$= 4\int_0^4 |y|\,dx = \int_0^4 \frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}\,dx$$

$$\left(\because \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \therefore |y| = \frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}\right)$$

$$= 3\int_0^4 \sqrt{4^2-x^2}\,dx = 3\left[\frac{x}{2}\sqrt{4^2-x^2} + \frac{4^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{4}\right)\right]_0^4$$

$$\left[\because \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{a}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right]$$

$$= 3[2\sqrt{16-16} + 8\sin^{-1}(1) - 0 - 8\sin^{-1}(0)]$$

$$= 3[0 + 8\sin^{-1}(1) - 0]$$

$$= 3\times 8\times\left(\frac{\pi}{2}\right) = 12\pi$$ वर्ग इकाई

अतः दीर्घवृत्त द्वारा घिरा क्षेत्रफल 12π वर्ग इकाई है।

36. दिया गया सदिश $\vec{a} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$; $\vec{b} = \lambda\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

दोनों सदिश के योगफल के अनुदिश इकाई सदिश होगा।

$$\vec{a} + \vec{b} = \left(2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}\right) + \left(\lambda\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}\right)$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (2+\lambda)\hat{i} + \left(4\hat{j} + 2\hat{j}\right) + \left(-5\hat{k} + 3\hat{k}\right)$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (2+\lambda)\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$$

$\vec{a} + \vec{b}$ का इकाई सदिश $= \dfrac{(2+\lambda)\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}}{\sqrt{(2+\lambda)^2 + 36 + 4}}$

प्रश्नानुसार, $\dfrac{(2+\lambda)\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}}{\sqrt{(2+\lambda)^2 + 36 + 4}} \cdot \left(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}\right) = 1$

$\Rightarrow \quad 1\times(2+\lambda) + 1\times 6 + 1\times(-2) = \sqrt{(2+\lambda)^2 + 40}$

$\Rightarrow \quad 2 + \lambda + 6 - 2 = \sqrt{(2+\lambda)^2 + 40}$

$\Rightarrow \quad \lambda + 6 = \sqrt{(2+\lambda)^2 + 40}$

दोनों तरु वर्ग करने पर,

$\Rightarrow \quad \lambda^2 + 12\lambda + 36 = 4 + 4\lambda + \lambda^2 + 40$

$\Rightarrow \quad 12\lambda + 36 = 4\lambda + 44$

$\Rightarrow \quad 12\lambda - 4\lambda = 44 - 36$

$\Rightarrow \quad 8\lambda = 8 \qquad \therefore \boxed{\lambda = 1}$ **Ans.**

37. हमको उद्देश्य फलन $Z = 3x + 2y$ ...(i)

का अधिकतम मान निम्न अवरोधों के अंतर्गत ज्ञात करना है।

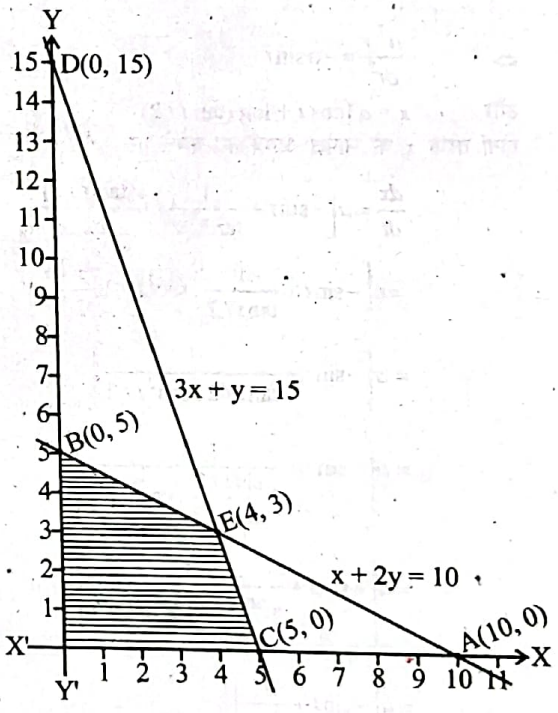
$x + 2y \le 10$ ...(ii)

$3x + y \le 15$ ...(iii)

$x \ge 0, y \ge 0$ ...(iv)

सर्वप्रथम रेखा $x + 2y = 10$ का ग्राफ खींचते हैं।

x	0	10
y	5	0



(0, 0) असमिका $x + 2y \le 10$ में रखने पर,

$0 + 2\times 0 \le 10 \Rightarrow 0 \le 10$ (जो कि सत्य है)

अतः अर्द्धतल मूलबिंदु की ओर होगा।

चूँकि $x, y \ge 0$.

अतः सुसंगत क्षेत्र प्रथम चतुर्थांश में हैं।

अब, रेखा $3x + y = 15$ का ग्राफ खींचते हैं–

x	0	5
y	15	0

(0, 0) असमिका $3x + y \le 15$ में रखने पर,

$3 \times 0 + 0 \le 15 \Rightarrow 0 \le 15$ (जो कि सत्य है)

अतः अर्द्धतल मूलबिंदु की ओर हैं।

समीकरण $x + 2y = 10$ तथा $3x + y = 15$ को हल करने पर, $x = 4$ तथा $y = 3$ प्राप्त होते हैं।

∴ प्रतिच्छेद बिंदु OABCO है।

इस प्रकार, सुसंगत क्षेत्र के शीर्ष बिंदु O(0, 0), A (5, 0), B(4, 3) तथा C(0, 5) हैं। इन शीर्ष बिंदुओं पर Z का मान निम्न है–

शीर्ष बिंदु	$Z = 3x + 2y$
O(0, 0)	0
A(5, 0)	15
B(4, 3)	18 → अधिकतम
C(0, 5)	10

अतः Z का अधिकतम मान 18 है जो कि बिंदु B(4, 3) पर है।

38. दिया है, स्कूटर चालकों की संख्या = 2000, कार चालकों की संख्या = 4000 तथा ट्रक चालकों की संख्या = 6000

अतः कुल चालकों की संख्या = 2000 + 4000 + 6000 = 12000

मान लीजिए E_1 घटना 'बीमाकृत व्यक्ति एक स्कूटर चालक है', E_2 घटना 'बीमाकृत व्यक्ति एक कार चालक है' तथा E_3 घटना 'बीमाकृत व्यक्ति एक ट्रक चालक है' को निरूपित करता है। अतः E_1, E_2 तथा E_3 परस्पर अपवर्जी तथा परिपूर्ण घटनाएँ है।

और $$P(E_1) = \frac{\text{स्कूटर चालकों की संख्या}}{\text{कुल चालकों की संख्या}} = \frac{2000}{12000} = \frac{1}{6}$$

$$P(E_2) = \frac{\text{कार चालकों की संख्या}}{\text{कुल चालकों की संख्या}} = \frac{4000}{12000} = \frac{1}{3}$$

और $$P(E_3) = \frac{\text{ट्रक चालकों की संख्या}}{\text{कुल चालकों की संख्या}} = \frac{6000}{12000} = \frac{1}{2}$$

मान लीजिए घटना E 'बीमाकृत व्यक्ति में से एक दुर्घटनाग्रस्त हो जाता है' को निरूपित करता है।

$P\left(\frac{E}{E_1}\right) = P$ (दुर्घटनाग्रस्त चालक एक स्कूटर चालक है)

$= 0.01 = \frac{1}{100}$

$P\left(\frac{E}{E_2}\right) = P$ (दुर्घटनाग्रस्त चालक एक कार चालक है) $= 0.03 = \frac{3}{100}$

$P\left(\frac{E}{E_3}\right) = P$ (दुर्घटनाग्रस्त चालक एक ट्रक चालक है) $= 0.15 = \frac{15}{100}$

मान लीजिए $P\left(\frac{E_1}{E}\right)$ बीमाकृत चालकों में एक, जो दुर्घटनाग्रस्त हो जाता है, के स्कूटर चालक होने की प्रायिकता है।

बेज प्रमेय के प्रयोग से,

$$P\left(\frac{E_1}{E}\right) = \frac{P\left(\frac{E}{E_1}\right)P(E_1)}{P\left(\frac{E}{E_1}\right)P(E_1) + P\left(\frac{E}{E_2}\right)P(E_2) + P\left(\frac{E}{E_3}\right)P(E_3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{6} \times \frac{1}{100}}{\frac{1}{6} \times \frac{1}{100} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{100} + \frac{1}{2} \times \frac{15}{100}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + 1 + \frac{15}{2}} = \frac{1}{1 + 6 + 45} = \frac{1}{52}$$