MODEL PAPER – 5

● परीक्षार्थियों के लिये निर्देश MODEL PAPER – 1 के समान होगा।

खण्ड–अ (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

प्रश्न संख्या 1 से 100 तक के प्रत्येक प्रश्न के साथ चार विकल्प दिये गए हैं, जिनमें से एक सही है। अपने द्वारा चुने गए सही विकल्प को OMR शीट पर चिह्नित करें। किन्हीं 50 प्रश्नों का उत्तर दें। $50 \times 1 = 50$

1. मान लीजिए कि समुच्चय $\{1, 2, 3, 4\}$ में $R = \{(1, 2), (2, 2), (1, 1), (4, 4), (1, 3), (3, 3), (3, 2)\}$ द्वारा परिभाषित संबंधा R है। निम्नलिखित में से सही उत्तर चुनिए
   (A) R स्वतुल्य तथा सममित है किन्तु संक्रमक नहीं है
   (B) R स्वतुल्य तथा संक्रमक है किंतु सममित नहीं हैं
   (C) R सममित तथा संक्रमक है किन्तु स्वतुल्य नहीं है
   (D) R एक तुल्यता संबंध है।

2. मान लीजिए कि $f(x) = 3x$ द्वारा परिभाषित फलन $f : R \to$ है
   (A) f एकैकी आच्छादक है (B) f बहुएक आच्छादक है
   (C) f एकैकी है किन्तु आच्छादक नहीं है
   (D) f न तो एकैकी है और न आच्छादक है

3. समुच्चय $\{a, b\}$ में द्विआधारी संक्रिया की संख्या है
   (A) 10 (B) 16 (C) 20 (D) 8

4. $\sec^2(\tan^{-1} 5) + \text{cosec}^2(\cot^{-1} 5)$ बराबर है
   (A) 10 (B) 50 (C) 51 (D) 52

5. $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + 2\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ बराबर है
   (A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{2\pi}{3}$
   (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) इनमें से कोई नहीं

6. $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ का मान है
   (A) $\frac{1}{2}$ है (B) $\frac{1}{3}$ है (C) $\frac{1}{4}$ है (D) 1है

7. $\tan^{-1}(1) + \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ बराबर है
   (A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{5\pi}{12}$ (C) $\frac{3\pi}{4}$ (D) $\frac{13\pi}{12}$

8. $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x$ बराबर है
   (A) $-\pi$ (B) $-\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

9. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ तो A^2 है

(A) $27A$ (B) $2A$ (C) $3A$ (D) I

10. यदि ω समीकरण $x^3-1=0$ का एक अवास्तविक मूल हो, तो

$$\begin{vmatrix}1 & \omega & \omega^2\\ \omega & \omega^2 & 1\\ \omega^2 & 1 & \omega\end{vmatrix}=$$

(A) 0 (B) 1 (C) ω (D) ω^2

11. एक मैट्रिक्स $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ सममित है यदि

(A) $a_{ij}=0$ (B) $a_{ij}=-a_{ji}$ (C) $a_{ij}=a_{ji}$ (D) $a_{ij}=1$

12. यदि मैट्रिक्स $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ विषम सममित है यदि

(A) $a_{ij}=0$ (B) $a_{ij}=-a_{ji}$ (C) $a_{ij}=a_{ji}$ (D) $a_{ij}=1$

13. सारणिक $\begin{vmatrix}3 & 1 & 7\\ 5 & 0 & 2\\ 2 & 5 & 3\end{vmatrix}$ के मान है

(A) 124 (B) 125 (C) 134 (D) 144

14. यदि a, b, c समान्तर श्रेणी में हैं तो सारणिक $\begin{vmatrix}x+2 & x+3 & x+2a\\ x+3 & x+4 & x+2b\\ x+4 & x+5 & x+2c\end{vmatrix}$ है

(A) 1 (B) x (C) 0 (D) $2x$

15. $PY+WY$ के परिभाषित होने के लिए n, k तथा P पर क्या प्रतिबन्ध होगा ?

(A) $k=3, p=n$ (B) k स्वेच्छ है $p=2$

(C) p स्वेच्छ है, $k=3$ (D) $k=2, p=3$

16. यदि x, y, z शून्येतर संख्याएँ हों तो आव्यूह $A=\begin{pmatrix}x & 0 & 0\\ 0 & y & 0\\ 0 & 0 & z\end{pmatrix}$ का व्युत्क्रम है

(A) $\begin{bmatrix}x^{-1} & 0 & 0\\ 0 & y^{-1} & 0\\ 0 & O & z^{-1}\end{bmatrix}$ (B) $xyz\begin{bmatrix}x^{-1} & 0 & 0\\ 0 & y^{-1} & 0\\ 0 & 0 & z^{1}\end{bmatrix}$

(C) $\frac{1}{xyz}\begin{bmatrix}x & 0 & 0\\ 0 & y & 0\\ 1 & 0 & z\end{bmatrix}$ (D) $\frac{1}{xyz}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$

17. यदि $y=\log(\log x)$ तब $\frac{dy}{dx}$ का मान होगा

(A) $x\log$ (B) $\frac{1}{x\log x}$ (C) $\frac{1}{\log x}$ (D) $\frac{1}{x}$

18. यदि $f(x)=\sin(x^2)$ तब $\frac{df}{dx}$

(A) $2x\sin x^2$ (B) $2x\cos x^2$ (C) $2\cos x$ (D) $2x\sin x$

19. यदि $y=\tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$, तो $\frac{dy}{dx}$

(A) $1+\cos^2 x$ (B) $-\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{2}$

20. एक उत्पाद की इकाइयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय रुपये में $R(x)=3x^2+36x+5$ से प्रदत्त है। जब $x=15$ है तब सीमांत आय है

(A) 116 रु॰ (B) 96 रु॰ (C) 90 रु॰ (D) 126 रु॰

21. रोले प्रमेय का प्रयोग कर वक्र $f(x)=(x-1)(x-2)$ का $[-1, 2]$ का वह बिन्दु जहाँ स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर है

(A) $(-1, 0)$ (B) $(2, 0)$ (C) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{2}\right)$ (D) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$

22. एक वृत्त की त्रिज्या 0.7 cm/sec की दर से बढ़ रही है। इसकी परिधि की वृद्धि की दर होगी, जब $r=4.9$ cm हो

(A) 0.7π cm/sec (B) π cm/sec

(C) 2.1π cm/sec (D) 1.4π cm/sec

23. यदि $\theta+\phi=\frac{\pi}{3}$ का $\sin\theta.\sin\phi$ का अधिकतम मान होगा जब θ का मान होगा

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{3}$

(C) $\frac{\pi}{6}$ (D) इनमें से कोई नहीं

24. एक वृत्त के त्रिज्या $r=6$ सेमी पर r के सापेक्ष वृत्त के क्षेत्रफल की परिवर्तन की दर है

(A) 10π सेमी²/सेमी (B) 12π सेमी²/सेमी

(C) 8π सेमी²/सेमी (D) 11π सेमी²/ सेमी

25. $\int_0^{\pi/4}\sin 2x\,dx$ का मान है

(A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{4}$

26. $\int 1.dx=$

(A) $x+k$ (B) $1+k$ (C) $\frac{x^2}{2}$ (D) $\log x+k$

27. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=$

(A) $\sqrt{x}+k$ (B) $2\sqrt{x}+k$

(C) $x+k$ (D) $\frac{2}{3}x^{3/2}+k$

28. $\int_a^b x^5dx=$

(A) b^5-a^5 (B) $\frac{b^6-a^6}{6}$ (C) $\frac{a^6-b^6}{6}$ (D) a^5-b^5

29. $\int\log x dx$ बराबर है

(A) $x\log x+x+C$ (B) $x\log x-x+C$

(C) $\log x+x+C$ (D) $\log x-x+C$

30. $\int_0^1\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{1+x-x^2}\right)dx$ का मान है

(A) 1 (B) 0 (C) -1 (D) $\frac{\pi}{4}$

31. वक्र $|x|+|y|=1$ द्वारा घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है
(A) 4 (B) 8 (C) 2 (D) 1

32. अवकल समीकरण $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\sin\left(\frac{dy}{dx}\right)+1=0$ की घात है
(A) 3 (B) 2
(C) 1 (D) परिभाषित नहीं

33. चार कोटि वाले किसी अवकल समीकरण के व्यापक हल में उपस्थित स्वेच्छ अचरों की संख्या है
(A) 0 (B) 2 (C) 3 (D) 4

34. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{2y}$ का हल है
(A) $x-y=k$ (B) $x^2-y^2=k$ (C) $x^3-y^3=k$ (D) $xy=k$

35. रैखिक अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}=y\sec^2 x=\tan x\sec^2 x$ का समाकलन गुणक है
(A) $\tan x$ (B) $e^{\tan x}$ (C) $\log\tan x$ (D) $\tan^2 x$

36. अवकल समीकरण $\frac{ydx-xdy}{y}=0$ का व्यापक हल है
(A) $xy=C$ (B) $x=cy^2$ (C) $y=cx$ (D) $y=cx^2$

37. यदि $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}.\vec{b}|$ तो $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण होगा
(A) 0 (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) π

38. यदि $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$ और $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ तो $\vec{a}+\vec{b}=$
(A) $\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$ (B) $3\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$
(C) $\vec{i}-\vec{j}-3\vec{k}$ (D) $2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

39. यदि $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ तो
(A) $\vec{a}\parallel\vec{b}$ (B) $\vec{a}\perp\vec{b}$
(C) $|\vec{a}|=|\vec{a}|$ (D) इनमें से कोई नहीं

40. सदिश $2\vec{i}-7\vec{j}-3\vec{k}$ का मापांक है
(A) $\sqrt{61}$ (B) $\sqrt{62}$ (C) $\sqrt{64}$ (D) $\sqrt{32}$

41. समतल $2x-3y-6z-3=0$ के अभिलम्ब की दिक्कोज्याएँ हैं
(A) $\frac{2}{7},-\frac{3}{7},-\frac{6}{7}$ (B) $\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{6}{7}$
(C) $-\frac{2}{7},\frac{3}{7},-\frac{6}{7}$ (D) इनमें से कोई नहीं

42. यदि रेखा $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ तल $ax+by+cz+d=0$ के समांतर हो, तो
(A) $\frac{a}{l}=\frac{b}{m}=\frac{c}{n}$ (B) $al+bm+cn=0$
(C) $al^2+bm^2+cn^2=0$ (D) $a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2=0$

43. यदि एक सरल रेखा x, y और z अक्षों के साथ क्रमशः α, β और γ कोण बनाती है, तब
(A) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=-1$
(B) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$
(C) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=2$
(D) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

44. समतल $2x-3y+4z-6=0$ की मूल बिन्दु से दूरी है
(A) $\frac{2}{\sqrt{29}}$ (B) $\frac{4}{\sqrt{29}}$
(C) $\frac{6}{\sqrt{29}}$ (D) इनमें से कोई नहीं

45. एक रेखा का दिक् अनुपात $2,-1,-2$ है तब इसकी दिक् कोज्याएँ हैं
(A) $\frac{2}{3},\frac{-1}{3},\frac{-2}{3}$ (B) $-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}$
(C) $\frac{2}{3},\frac{-2}{3},\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}$

46. यदि $P(A)=\frac{7}{13}$, $P(B)=\frac{9}{13}$ और $P(A\cap B)=\frac{4}{13}$ तब $P\left(\frac{A}{B}\right)$ बराबर है
(A) $\frac{3}{9}$ (B) $\frac{4}{9}$ (C) $\frac{5}{9}$ (D) $\frac{7}{9}$

47. यदि A और B ऐसे हैं कि $P(A)>0$ और $P(B)\neq 1$ तब $P(\bar{A}/\bar{B})$ बराबर है
(A) $1-P\left(\frac{A}{B}\right)$ (B) $1-P\left(\frac{\bar{A}}{B}\right)$
(C) $1-\frac{P(A\cup B)}{P(B)}$ (D) $\frac{P(\bar{A})}{P(\bar{B})}$

48. यदि $P(E)=0.6$, $P(F)=0.3$ तब $P(E\cap F)=0.2$ है, तब $P\left(\frac{E}{F}\right)$ तथा $P\left(\frac{F}{E}\right)$ है
(A) $\frac{2}{3}$ तथा $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{3}$ तथा $\frac{2}{3}$
(C) $\frac{4}{3}$ तथा $\frac{2}{3}$ (D) इनमें से कोई नहीं

49. यदि A और B दो घटनाएँ एक ही यादृच्छिक प्रयोग से जुड़े हो ताकि $P(A)=0.4$, $P(B)=0.8$ और $P(B/A)=0.6$ तब $P(A/B)$ बराबर है
(A) 0.3 (B) 0.4 (C) 0.5 (D) 0.6

50. सुसंगत क्षेत्र कोई बिन्दु जो उद्देश्य फलन का उच्चतम या निम्नतम मान देता है, कहा जाता है
(A) अधिकतम ज्ञान (B) इष्टतम मान
(C) निम्नतम मान (D) इनमें से कोई नहीं

51. $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{2}{11}=\tan^{-1}a$ तब $a=$
(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) 1

52. $\cos^{-1}$ का प्रान्त है
(A) [0, 11] (B) [−1, 1] (C) [−1, 0] (D) [0, 0]

53. यदि $f(x)=\begin{cases}x, \text{यदि } x \text{ एक पूर्णांक है}\\0, \text{यदि } x \text{ एक पूर्णांक नहीं है}\end{cases}$ तब फलन $x=2$ पर
(A) संतत है (B) असंतत है
(C) परिभाषित है (D) इनमें से कोई नहीं

54. फलन $f(x) = 3x^2 + 5x + 7$ के लिए लेंगराँजे के माध्यम प्रमेय का c, अन्तराल $[1, 3]$ में मान होगा
(A) 3 (B) 0 (C) 2 (D) 1

55. $\int \frac{dx}{1+\cos x} =$
(A) $\tan\frac{x}{2}+k$ (B) $\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}+k$
(C) $2\tan\frac{x}{2}+k$ (D) $\tan^2\frac{x}{2}+k$

56. $\int_0^1 \tan^{-1}(1-x+x^2)dx$ का मान है
(A) $\log 2$ (B) $\log\frac{1}{2}$ (C) $\pi\log 2$ (D) $\frac{\pi}{2}\log\frac{1}{2}$

57. सदिशों $2\hat{i}-3\hat{j}+3\hat{k}$ एवं $\hat{i}+4\hat{j}+5\hat{k}$ के बीच का कोण है
(A) 30° (B) 90° (C) 45° (D) 60°

58. यदि $\vec{a} = \hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ और $\vec{b} = 3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ तो $\cos\theta =$
(A) $\frac{6}{7}$ (B) $\frac{5}{7}$ (C) $\frac{4}{7}$ (D) $\frac{1}{2}$

59. एक बॉक्स में 100 बल्ब हैं, जिसमें 10 त्रुटियुक्त है। तब 5 बल्ब के नमूने से एक बल्ब त्रुटियुक्त न होने की प्रायिकता है
(A) 10^{-1} (B) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ (C) $\left(\frac{9}{10}\right)^5$ (D) $\frac{9}{10}$

60. दो घटनाओं A और B को परस्पर स्वतंत्र कहते हैं यदि
(A) $P(A'B') = [1-P(A)][1-P(B)]$
(B) $P(A) = P(B)$ (C) $P(A)+P(B) = 1$
(D) A और B परस्पर अपवर्जी है

61. यदि A और B वर्ग मैट्रिक्स है, तो $(AB)^1$
(A) A^1B^1 (B) B^1A^1 (C) AB^1 (D) A^1B

62. अगर $\begin{bmatrix} x+y & 3 \\ 4 & x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ तब (x, y) है
(A) $(-1, 2)$ (B) $(-1, -2)$ (C) $(-2, -1)$ (D) $(1, -2)$

63. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ तब
(A) $|A| = 0$ (B) A^{-1} का अस्तित्व है
(C) $A^2 = 2A$ (D) इनमें से कोई नहीं

64. यदि $a \neq 0$ तथा $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = 0$ तब $a = ?$
(A) $a = -3$ (B) $a = 0$ (C) $a = 1$ (D) $a = 3$

65. यदि $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x+1 \\ 2x & x(x-1) & (x+1)x \\ 3x(x-1) & x(x-1)(x-2) & (x+1)(x-1) \end{vmatrix}$ तब $f(100)$ का मान है
(A) 0 (B) 1 (C) 100 (D) –100

66. $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ तब $k = ?$
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 8

67. यदि $x > 0$ तथा $x \neq 1$, $y > 0$ तथा $y \neq 1$, $z > 0$ तथा $z \neq 1$ तब $\begin{vmatrix} 1 & \log_x y & \log_x z \\ \log_y x & 1 & \log_y z \\ \log_z x & \log_z y & 1 \end{vmatrix}$ का मान है
(A) 1 (B) –1 (C) 0 (D) कोई नहीं

68. $\begin{vmatrix} y+z & z & x \\ y & z+x & y \\ z & z & x+y \end{vmatrix}$ का मान है
(A) $6xyz$ (B) xyz (C) $4xyz$ (D) $xy+yz+zx$

69. यदि $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 4 \\ 6 & x \end{vmatrix}$ तब x का मान है
(A) ± 2 (B) $\pm\frac{1}{3}$ (C) $\pm\sqrt{3}$ (D) $\pm(0.5)$

70. यदि $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = kabc$ तब x का मान है
(A) 2 (B) 3 (C) –4 (D) 4

71. यदि बिन्दु a, b (a_1, b_1) और $(a-a_1), (b-b_1)$ अरेखी है, तब
(A) $ab = a_1b_1$ (B) $aa_1 = bb_1$ (C) $ab_1 = ab$ (D) कोई नहीं

72. यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी के pवें, qवें और rवें पद l, m, n धनात्मक हो तो $\begin{vmatrix} \log l & p & 1 \\ \log m & q & 1 \\ \log n & r & 1 \end{vmatrix}$ बराबर है
(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) शून्य

73. यदि $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ GP में हो तो सारणिक का मान
$\begin{vmatrix} \log a_n & \log a_{n+1} & \log a_{n+2} \\ \log a_{n+3} & \log a_{n+4} & \log a_{n+5} \\ \log a_{n+6} & \log a_{n+7} & \log a_{n+8} \end{vmatrix}$
(A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) –2

74. माना $w = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ सब सारणिक का मान
$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1-w & w^2 \\ 1 & w^2 & w^4 \end{vmatrix}$
(A) $3w$ (B) $3w(w-1)$ (C) $3w^2$ (D) $3w(1-w)$

75. यदि $\lambda \in R$ और $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ तो $\lambda\Delta$ समान होगा
(A) $\begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{vmatrix}$ (B) $\begin{vmatrix} \lambda a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ (C) $\begin{vmatrix} \lambda a & b \\ \lambda c & d \end{vmatrix}$ (D) कोई नहीं

76. यदि $w \neq 1$, $w^3 = 1$ तथा $\begin{vmatrix} x+1 & w & w^2 \\ w & x+w^2 & 1 \\ w^2 & 1 & x+w \end{vmatrix} = 0$, तो $x =$
(A) 1 (B) w (C) w^2 (D) 0

77. यदि $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = 0$ तो $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} =$
(A) 0 (B) abc (C) $-abc$ (D) $a+b+c$

78. $\begin{vmatrix} n! & (n+1)! & (n+2)! \\ (n+1)! & (n+2)! & (n+3)! \\ (n+2)! & (n+3)! & (n+4)! \end{vmatrix} =$

(A) $(n+1)!\,(n+2)!\,(n+3)!$ (B) $n!\,(n+2)!\,(n+4)!$
(C) $2(n!)\,(n+1)!\,(n+2)!$ (D) $n!\,(n+1)!\,(n+3)!$

79. $\begin{vmatrix} {}^{n-1}C_{r-1} & {}^{n-1}C_r & {}^{n-1}C_{r+1} \\ {}^{n-1}C_{r-1} & {}^{n-1}C_{r+1} & {}^{n-1}C_{r+2} \\ {}^{n}C_{r-1} & {}^{n}C_{r+1} & {}^{n}C_{r+2} \end{vmatrix} =$

(A) ${}^{n-1}C_{r-1}\ {}^{n-1}C_r\ {}^{n}C_{r+1}$ (B) 0
(C) ${}^{n-1}C_{r-1}\ {}^{n-1}C_{r+1}\ {}^{n}C_{r+2}$ (D) ${}^{n+1}C_{r+1}$

80. यदि $\begin{vmatrix} 6i & -3i & 1 \\ 4 & 3i & -1 \\ 30 & 3 & i \end{vmatrix} = x + iy$ तो

(A) $x=3, y=1$ (B) $x=1, y=3$
(C) $x=0, y=3$ (D) $x=0, y=0$

81. $\begin{vmatrix} 1/a & 1 & bc \\ 1/b & 1 & ca \\ 1/c & 1 & ab \end{vmatrix} =$

(A) 0 (B) abc (C) $\frac{1}{abc}$ (D) कोई नहीं

82. यदि $x = \sin t, y = \cot t$ तो $\frac{dy}{dx} =$

(A) $-\tan t$ (B) $-\cot t$ (C) $\tan t$ (D) $\cot t$

83. यदि $x = t + \frac{1}{t}, y = t - \frac{1}{t}$ तो $\frac{dy}{dx} =$

(A) $\frac{2t}{t^2+1}$ (B) $\frac{t^2+1}{t^2-1}$ (C) $\frac{t^2-1}{t^2+1}$ (D) $\frac{2t}{1-t^2}$

84. यदि $x = \frac{\sin\theta}{\cos 2\theta}, y = \frac{\cos\theta}{\sin 2\theta}$ तो $\theta = \frac{\pi}{4}$ पर $\frac{dy}{dx} = at\left(\theta = \frac{\pi}{4}\right)$

(A) 1 (B) -1
(C) 2 (D) विद्यमान नहीं

85. यदि $2^x + 2^y = 2^{x+y}$ तो $\frac{dy}{dx} =$

(A) $\frac{2^x+2^y}{2^x-2^y}$ (B) $\frac{2^x+2^y}{1+2^{x+y}}$
(C) $\frac{2^{x+y}(2^y-1)}{1+2^x}$ (D) $\frac{2^{x+y}-2^x}{2^y}$

86. यदि $f(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}$ तो $f'(x) =$

(A) 12 (B) $6x^2$ (C) $6x$ (D) कोई नहीं

87. यदि $y = \tan^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ तो $\frac{dy}{dx} =$

(A) $\frac{2}{1+x^2}$ (B) $\frac{2}{1+x^2}$ (C) $\frac{1+x^2}{1-x^2}$ (D) कोई नहीं

88. $\int_0^\infty \frac{1}{1+e^x}dx =$

(A) $\log 2$ (B) $-\log 2$ (C) $\log 2 - 1$ (D) $\log 4 - 1$

89. $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}dx$

(A) $\frac{\pi}{8}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{\pi}{3}$)

90. $\int_1^3 \frac{\cos(\log x)}{x}dx$ का मान है

(A) $\sin(\log 3)$ (B) $\cos(\log 3)$
(C) 1 (D) $\pi/4$

यदि $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{9\sin^2 x + 4\cos^2 x} = p\pi$ तब $p =$

(A) $\frac{1}{16}$ (B) $\frac{1}{12}$ (C) $\frac{1}{8}$ (D) $\frac{1}{3}$

92. $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2+2x+2}$ का मान है

(A) 0 (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $-\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

93. $\int_0^1 x(1-x)^{99}$ के बराबर है

(A) $\frac{1}{10010}$ (B) $\frac{1}{10100}$ (C) $\frac{1}{1010}$ (D) $\frac{11}{10100}$

94. $\int_0^1 \frac{d}{dx}\left\{\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)\right\}dx$ का मान है

(A) 0 (B) π (C) $-\pi$ (D) $\frac{\pi}{2}$

95. $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin\theta - \cos\theta}{\sqrt{1-\sin 2\theta}}d\theta$ का मान है

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $-\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ या, $\frac{-\pi}{4}$ (D) कोई नहीं

96. $\int_0^1 e^x dx = \ldots.$

(A) $e-1$ (B) $\frac{e-1}{e}$ (C) $\frac{e-1}{e}$ (D) $\frac{3^2-1}{2}$

ONE PRAKASHAN

97. $\int_0^1 \frac{x}{1+x}dx = \ldots$

(A) $1-\log 2$ (B) 2 (C) $1+\log 2$ (D) $\log 2$

98. यदि $y = \log\{\log(\log x)$, तब $\frac{dy}{dx} =$

(A) $\frac{1}{\log(\log y)}$ (B) $\frac{1}{x\log x\log(\log x)}$

(C) $\frac{1}{x\log(\log x)}$ (D) कोई नहीं

99. यदि $y = e^{x+e^x+e^x\ldots}$ तब $\frac{dy}{dx} =$

(A) $\frac{y}{y+1}$ (B) $\frac{y}{y-1}$ (C) $\frac{y}{1-y}$ (D) कोई नहीं

100. यदि $x\sqrt{1+y}+y\sqrt{1+x}=0$ तब $\frac{dy}{dx} =$

(A) $\frac{x+1}{x}$ (B) $\frac{1}{1+x}$ (C) $\frac{-1}{(1+x)^2}$ (D) कोई नहीं

खण्ड–ब (गैर-वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न संख्या 1 से 30 लघु उत्तरीय हैं। किन्हीं 15 प्रश्नों के उत्तर दें। प्रत्येक के लिए 2 अंक निर्धारित है। $15 \times 2 = 30$

1. यदि $f: R \to R$ परिभाषित है कि $f(x) = x^2 - 3x + 2$ तो $f(f(x))$ निकालें।
2. यदि * प्राकृत संख्याओं के समुच्चय N पर एक द्विआधारी संक्रिया है जो इस प्रकार परिभाषित है, $a * b = a^b$, (i) 2 * 3 (ii) 3 * 2 निकालें।
3. यदि $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \pi$ तब सिद्ध करें कि $x+y+z = xyz$
4. सिद्ध करें : $\tan^{-1}\frac{1}{4} + \tan^{-1}\frac{2}{9} = \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$
5. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ - & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ दिखाएँ कि $(AB)' = B'A'$.
6. X तथा Y का मान निकालें : $X+Y = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ तथा $X-Y = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$
7. यदि $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.X = \begin{bmatrix} -4 & 8 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$, तो X ज्ञात करें।
8. यदि A (x, y), B (1, 2) तथा C (2, 1), 6 वर्ग इकाई क्षेत्रफल वाले किसी त्रिभुज के शीर्ष हैं, तो दिखाएँ कि $x + y = 15$ या -9
9. K का मान निकालें, जिससे कि प्रदत्त फलन $f(x)$ निर्दिष्ट बिन्दुओं पर संतत हो

$$f(x) = \begin{cases} \frac{K\cos x}{\pi - 2x} & \text{यदि } x \neq \frac{\pi}{2} = 3 \\ & \text{यदि } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

10. यदि $x + y = \sin(xy)$, $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करें।
11. $\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ का $\cos^{-1}(2x^2 - 1)$ के सापेक्ष अवकल गुणांक निकालें।
12. सिद्ध करें कि वक्र $y = 7x^3 + 11$ के उन बिन्दुओं पर स्पर्श रेखाएँ समांतर हैं जहाँ $x = 2$ तथा $x = -2$.
13. एक परिवर्तनशील घन का किनारा 3 cm/sec की दर से बढ़ रहा है। घन का आयतन किस दर से बढ़ रहा है जब घन का किनारा 10 cm लम्बा है ?
14. समाकलन कीजिए : $\int \frac{dx}{1+\sin x}$.
15. मान निकालें : $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}dx}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}$
16. ज्ञात करें : $\int \tan x\, dx$.
17. अनुकूलन का प्रयोग कर परवलय $y^2 = 16x$ और रेखा $x = 4$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल निकालें।
18. हल करें : $\log\left(\frac{dy}{dx}\right) = ax + by$
19. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + \sec x \,.\, y = \tan x \left(0 \le x < \frac{\pi}{2}\right)$ को हल करें।
20. सिद्ध करें कि $(\vec{a} \times \vec{b})^2 + (\vec{a} \,.\, \vec{b})^2 = a^2b^2$.
21. यदि $\hat{a}$ और $\hat{b}$ इकाई सदिश हों तथा उनके बीच का कोण θ हो, तो दिखाएँ कि $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}|\hat{a} - \hat{b}|$.]
22. λ का मान ज्ञात करें जिसके लिए समतल $2x - 4y + 3z = 7$ और $x + 2y + \lambda z = 18$ एक-दूसरे पर लम्ब हो।
23. बिन्दुओं (1, 2, 3) तथा (–1, 4, 2) को मिलानेवाली रेखाखंड का उस रेखा पर प्रक्षेप ज्ञात करें जिसका दिक्-अनुपात 2, 3, –6 हैं।
24. निम्नलिखित पदों की परिभाषा लिखें :
(i) व्यवरोध (ii) रैखिक प्रोग्रामन।
25. दो पासे फेंकने के क्रम में ऊपर आए अंकों का योग 8 होने की क्या प्रायिकता है, यदि मालूम हो कि दूसरे पासे पर हमेशा 4 आता है ?
26. P (A ∪ B) ज्ञात कीजिए यदि $2P(A) = P(B) = \frac{5}{13}$ और $P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{2}{5}$।
27. संकेन्द्रीय वृत्तों के कुल का अवकल समीकरण ज्ञात करें जिनकी त्रिज्याएँ भिन्न-भिन्न हैं तथा केन्द्र कूल बिन्दु है।
28. एक बैग में 2 उजला, 3 लाल, 5 हरा एवं 4 काला बॉल है, दो बॉल at random उस बैग से एक-एक करके बिना स्थानान्तर का निकाला जाता है। प्रायिकता ज्ञात करें कि दोनों बॉल विभिन्न रंग के हों।
29. मान लीजिए कि $f: \{1, 3, 4\} \to \{1, 2, 5\}$ तथा $g: \{1, 2, 5\} \to \{1, 3\}$, $f = \{(1, 2), (3, 5), (4, 1)\}$ तथा $g = \{(1, 3), (2, 3), (5, 1)\}$ द्वारा प्रदत्त हैं। gof ज्ञात कीजिए।
30. सिद्ध करें कि

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{4}$$

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न संख्या 31 से 38 दीर्घ उत्तरीय प्रश्न हैं। किन्हीं 4 प्रश्नों के उत्तर दें। प्रत्येक के लिए 5 अंक निर्धारित हैं। $4 \times 5 = 20$

31. आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -6 & 8 & 3 \\ -4 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ को एक सममित और एक विषम सममित आव्यूहों के योग के रूप में व्यक्त करें।

32. यदि $y = 3\cos(\log x) + 4\sin(\log x)$ है, तो दर्शाइए कि $x^2y_2 + xy_1 + y = 0$.

33. $\theta = \frac{\pi}{4}$ पर वक्र $x = 1 - \cos\theta; y = \theta - \sin\theta$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात करें।

34. समाकलन करें : $\int \frac{1}{x(x^n+1)}dx$

35. क्षेत्र $\{(x, y) : y^2 \le 4x, 4x^2 + 4y^2 \le 9\}$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

36. यदि $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ सिद्ध करें कि $(\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{c} \times \vec{a})$.

37. निम्नांकित LPP का आलेखीय हल निकालें :
न्यूनतमीकरण और अधिकतमीकरण करें $Z = x + 2y$
जबकि $x + 2y \ge 100$,
$2x - y \le 0$
$2x + y \le 200$
$x, y \ge 0$

38. 52 ताशों की गड्डी से एक पत्ता खो जाता है। शेष पत्तों से दो पत्ते निकाले जाते हैं, जो ईंट के पत्ते हैं। खो गए पत्ते की ईंट होने की प्रायिकता क्या है ?

उत्तर

खण्ड–अ (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

1. (B)	2. (A)	3. (B)	4. (D)	5. (B)	6. (D)
7. (C)	8. (C)	9. (C)	10. (A)	11. (C)	12. (C)
13. (C)	14. (C)	15. (A)	16. (A)	17. (B)	18. (B)
19. (D)	20. (D)	21. (A)	22. (D)	23. (C)	24. (B)
25. (B)	26. (A)	27. (B)	28. (B)	29. (B)	30. (B)
31. (B)	32. (A)	33. (D)	34. (B)	35. (B)	36. (C)
37. (C)	38. (B)	39. (B)	40. (B)	41. (A)	42. (B)
43. (B)	44. (C)	45. (A)	46. (B)	47. (C)	48. (A)
49. (A)	50. (B)	51. (C)	52. (B)	53. (B)	54. (C)
55. (A)	56. (A)	57. (B)	58. (B)	59. (C)	60. (A)
61. (B)	62. (A)	63. (B)	64. (A)	65. (A)	66. (B)
67. (C)	68. (C)	69. (C)	70. (D)	71. (D)	72. (D)
73. (C)	74. (A)	75. (C)	76. (D)	77. (B)	78. (C)
79. (B)	80. (D)	81. (A)	82. (A)	83. (B)	84. (C)
85. (C)	86. (B)	87. (B)	88. (A)	89. (A)	90. (A)
91. (B)	92. (B)	93. (B)	94. (D)	95. (A)	96. (A)
97. (A)	98. (B)	99. (C)	100. (C)		

खण्ड–ब (गैर-वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

लघु उत्तरीय प्रश्न

1. दिया है फलन $f(x) = x^2 - 3x + 2$
तब $f\{f(x)\} = [f(x)]^2 - 3f(x) + 2$
$f\{f(x)\} = (x^2 - 3x + 2)^2 - 3(x^2 - 3x + 2) + 2$
$f\{f(x)\} = x^4 + 9x^2 + 4 - 6x^3 - 12x + 4x^2 - 3x^2 + 9x - 6 + 2$
$f\{f(x)\} = x^4 - 6x^3 - 10x^2 - 3x$ **Ans.**

2. $a * b = a^b$
$\therefore \quad 2 * 3 = 2^3 = 8$
तथा $\quad 3 * 2 = 3^2 = 9$

3. दिया हुआ है कि, $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \pi$

तब, $\tan^{-1}\left(\frac{x + y + z - xyz}{1 - xy - yz - zx}\right) = \pi$

या, $\frac{x + y + z - xyz}{1 - xy - yz - zx} = \tan\pi = 0$

या, $x + y + z - xyz = 0$

$\therefore \quad x + y + z = xyz$

4. $\tan^{-1}\frac{1}{4} + \tan^{-1}\frac{2}{9} = \tan^{-1}\frac{1}{2}$

$\therefore$ L.H.S. $= \tan^{-1}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.2\tan^{-1}\frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}}\right) \quad \left[\because 2\tan^{-1}x = \cos^{-1}\frac{1 - x^2}{1 + x^2}, \text{यहाँ } x = \frac{1}{2}\right]$

$= \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) =$ R.H.S.

5. $AB = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{2\times3} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{3\times2} = \begin{bmatrix} 0 & 15 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}_{2\times2}$

$\therefore \quad (AB)' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 15 & -2 \end{bmatrix}$ ...(1)

साथ ही $\quad B' = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3}$ तथा $A' = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

अब $B'A' = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 15 & -2 \end{bmatrix}$ ...(2)

(1) तथा (2) से हमें मिलता है, $(AB)' = B'A'$

6. दिया है कि $X + Y = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ...(i)

$X - Y = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ...(ii)

समी॰ (i) तथा (ii) को जोड़ने पर,

$\Rightarrow \quad 2X = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow 2X = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

$X = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

पुनः समी॰ (ii) में (i) को घटाने पर

$\Rightarrow \quad 2Y = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow 2Y = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad Y = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

7. माना $A = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, और $B = \begin{bmatrix} -4 & 8 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$.

इस प्रकार, दिया गया है $AX = B$
हमें X पता करना है।
अब $AX = B$

$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}[a\ b\ c] = \begin{bmatrix} -4 & 8 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$

सर्वाधिक प्रश्न ... A ONE PRAKASHAN, PATNA

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4a & 4b & 4c \\ a & b & c \\ 3a & 3b & 3c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 8 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

दो आव्यूहों को समान करने पर, हम पाते हैं कि

$4a = -4 \Rightarrow a = -1$

$4b = 8 \Rightarrow b = 2$

$4c = 4 \Rightarrow c = 4$

इस प्रकार $X = [a\ b\ c] = [-1, 2, 1]$

8. ΔABC का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}\left|\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right| \text{ का मापांक } = \left|\frac{1}{2}[x(2-1) - y(1-2) + 1(1-4)]\right|$$

[पहले row के अनुदिश विस्तार करने पर]

$$= \left|\frac{1}{2}[x + y - 3]\right|$$

प्रश्न से, $\left|\frac{1}{2}[x+y-3]\right| = 6$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(x+y-3) = \pm 6 \qquad [\because |x| = k \Leftrightarrow x = \pm k]$

$\Rightarrow x + y - 3 = \pm 12 \quad \Rightarrow x + y = 15$ या -9

9. चूँकि $f(x), x = \frac{\pi}{2}$, पर संतत है।

$$\therefore \quad \lim_{h\to 0} f\left(\frac{x}{2} + h\right) = \lim_{h\to 0} f\left(\frac{x}{2} - h\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{h\to 0} \frac{K\cos\left(\frac{\pi}{2} + h\right)}{\pi - 2\left(\frac{\pi}{2} + h\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{K\cos\left(\frac{\pi}{2} - h\right)}{\pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - h\right)} = 3$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{h\to 0} -\frac{-K\sin h}{-2h} = 3 \lim_{h\to 0} -\frac{K\sin h}{2h} = 3 \Rightarrow \frac{K}{2} = 3$$

$\Rightarrow \quad K = 6$

10. दिया है, $x + y = \sin(xy)$

x के सापेक्ष अवकलित करने पर हमें मिलता है,

$$1 + \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin(xy)) = \frac{d}{dx}\sin(xy).\frac{d}{dx}(xy)$$

$$= \cos(xy).\left(1.y + x\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= y\cos(xy) + x\cos(xy)\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \quad [1 - x\cos(xy)]\frac{dy}{dx} = y\cos(xy) - 1$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y\cos(xy) - 1}{1 - x\cos(xy)}$$

11. माना कि $u = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $v = \cos^{-1}(2x^2 - 1)$

हमें $\frac{du}{dv}$ निकालना है,

$x = \cos\theta$, रखें, तो

$$u = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \tan^{-1}\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) = \tan^{-1}(\cot\theta)$$

$$= \tan^{-1}\tan\left(\frac{\pi}{2}\theta\right) = \frac{\pi}{2} - \theta \qquad \therefore \frac{du}{d\theta} = -1$$

तथा $v = \cos^{-1}(2x^2 - 1) = \cos^{-1}(2\cos^2\theta - 1)$

$$= \cos^{-1}(\cos 2\theta) = 2\theta \qquad \therefore \frac{dv}{d\theta} = 2$$

अब $\frac{du}{dv} = \frac{du/d\theta}{dv/d\theta} = -\frac{1}{2}$

12. दिए गए वक्र का समीकरण $y = 7x^3 + 11$

दोनों तरफ x के सापेक्ष अवकल करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = 21x^2$$

अब $m_1, x = 2$ पर स्पर्श रेखा का स्लोप है।

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=2} = 21\times(2)^2 = 21\times 4 = 84$$

और $m_2, x = -2$ पर स्पर्श रेखा का स्लोप है।

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=-2} = 21\times(-2)^2 = 21\times 4 = 84$$

अतः स्पष्ट है कि $m_1 = m_2$

इसलिए दोनों बिन्दु $x = 2$ तथा $x = -2$ पर स्पर्श रेखाएँ समांतर है।

13. माना कि किसी समय t पर परिवर्तनशील घन के किनारा की लम्बाई x है तथा इसका आयतन V है।

तो $V = x^3$ ...(1)

चूँकि घन का किनारा 3 cm/sec की दर से बढ़ रहा है,

$$\therefore \quad \frac{dx}{dt} = 3 \text{ cm/sec}$$

हमें $\frac{dV}{dt}$ निकालना है जब $x = 10$ cm.

(1) के दोनों पक्षों को t के सापेक्ष अवकलित करने पर हमें मिलता है,

$$\frac{dV}{dt} = 3x^2\frac{dx}{dt} = 3x^2.3 = 9x^2$$

जब $x = 10$ cm, $\frac{dV}{dt} = 9\ (10)^2 = 900$ cm³/sec

अतः जब घन के किनारे की लम्बाई 10 cm है तो इसका आयतन 900 cm³/sec की दर से बढ़ रहा है।

14. $$I = \int\frac{dx}{1+\sin x}dx = \int\frac{1}{1+\sin x}\times\frac{1-\sin x}{1-\sin x}dx$$

$$= \int\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}dx = \int\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)dx$$

$$= \int(\sec^2 x - \sec x.\tan x)dx = \int\sec^2 x dx - \int\sec x.\tan x\,dx$$

$$I = \tan x - \sec x + c$$

15. दिया है $I=\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}.dx$ ...(i)

$$I=\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}+\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}dx$$

$$\left[\because \int_0^a f(x)=dx=\int_0^a f(a-x)dx\right]$$

$$I=\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}} \quad ...(ii)$$

(i) + (ii) को जोड़ने पर

$$2I=\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}+\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}$$

या, $$2I=\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}+\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}\right)dx$$

या, $$2I=\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}{\left(\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}\right)}dx$$

या, $I=\int_0^{\pi/2}dx$; $I=\frac{1}{2}[x]_0^{\pi/2}=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}-0\right]$;

∴ $\boxed{I=\frac{\pi}{4}}$ **Ans.**

16. [यहाँ $\sec x$ का घात सम घन पूर्णांक नहीं है इसलिए $\tan x$ का घात देखते हैं। $\tan x$ का घात विषम घन पूर्णांक है, इसलिए $z=\sec x$ रखें]

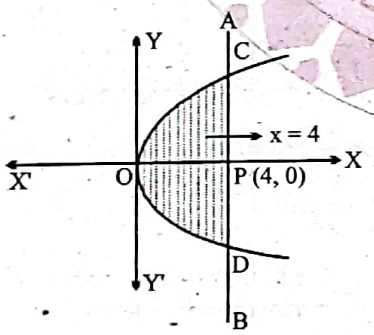
माना कि $z=\sec x$, तो $dz=\sec x\tan x\,dx$

अब, $\int\tan x\,dx=\int\frac{\sec x\tan x\,dx}{\sec x}=\int\frac{dz}{z}$, जहाँ $z=\sec x$

$=\log|z|+c=\log x|+c$

17. $y^2=16x$ एक परवलय निरूपित करता है।

अत: वक्र का ग्राफ निम्नलिखित है–



अत: अभीष्ट क्षेत्रफल

$$=2\int_0^4 4\sqrt{x}\,dx=8\frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$$

$$=\frac{16}{3}\left[4^{\frac{3}{2}}-0\right]=\frac{16}{3}\times 8=\frac{128}{5}$$ वर्ग इकाइयाँ

18. $\log\left(\frac{dy}{dx}\right)=ax+by \Rightarrow \frac{dy}{dx}=e^{ax+by}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=e^{ax}.e^{by}$

$\Rightarrow e^{-by}\,dy=e^{ax}.dx$

अब दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$$\int e^{-by}dy=\int e^{ax}dx$$

$\Rightarrow \frac{e^{-b}}{-b}=\frac{e^{ax}}{a}+c$ जो अभीष्ट समीकरण है।

19. दिया गया अवकल समीकरण है–

$$\frac{dy}{dx}+\sec x\,.\,y=\tan x \quad ...(1)$$

यह $\frac{dy}{dx}+Py=Q$ के रूप का रैखिक अवकल समीकरण है,

जहाँ, $P=\sec x$ तथा $Q=\tan x$

अब I.F. $=e^{\int P dx}=e^{\int\sec x dx}=e^{\log(\sec x+\tan x)}=\sec x+\tan x$

∴ दिए गए अवकल समीकरण (1) का हल होगा,

$$y.(\sec x+\tan x)=\int\tan x(\sec x+\tan x)dx+c$$

$$=\int(\sec x+\tan x+\tan^2 x)dx+c$$

$$=\int\sec x\tan x dx+\int\sec 2x dx-\int 1\cdot dx+c$$

∴ $y(\sec x+\tan x)=\sec x+\tan x-x+c$

यही दिए गए अवकल समीकरण का अभीष्ट हल है।

20. हमें सिद्ध करना है $(\vec{a}\times\vec{b})^2+(\vec{a}.\vec{b})^2=a^2b^2$

L.H.S. लेने पर $(\vec{a}\times\vec{b})^2+(\vec{a}.\vec{b})^2$

जैसा कि हम जानते हैं।

$\vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\hat{n}$ और $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

उसी तरह

$$(|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta)^2+(|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta)^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\theta+|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\theta$$

$$=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(\sin^2+\cos\theta)^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$$

$=a^2b^2$ सिद्ध हुआ। $\left(\text{चूँकि } |\vec{a}|=a,\ |\vec{b}|=b\right)$

21. $(\hat{a}-\hat{b})\cdot(\hat{a}-\hat{b})=\hat{a}^2+b^2-2\hat{a}\cdot\hat{b}=1+1-2\cos\theta$

$\Rightarrow |\hat{a}-\hat{b}|^2=2(1-\cos\theta)$

$\Rightarrow |\hat{a}-\hat{b}|^2=4\sin^2\frac{\theta}{2} \Rightarrow |\hat{a}-\hat{b}|=\left|2\sin\frac{\theta}{2}\right|$

$\therefore \frac{1}{2}|\hat{a}-\hat{b}|=\sin\frac{\theta}{2} \quad \left[\because 0\le\frac{\theta}{2}<\pi\right]$

22. यदि दो समतल $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ और $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ एक-दूसरे पर लम्ब हो तो

$$a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$$

यहाँ $a_1=2, b_1=-4, c_1=3$

और $a_2=1, b_2=2$ तथा $c_2=\lambda$.

सर्वाधिकार सुरक्षित
A-ONE PRAKASHAN, PATNA

$\Rightarrow \quad 2 \times 1 + (-4) \times 2 + 3 \times \lambda = 0$

$\therefore \quad \lambda = 2$

23. माना कि $A \equiv (1, 2, 3), B \equiv (-1, 4, 2)$

PQ के direction ratios 2, 3, – 6 हैं।

साथ ही $\sqrt{2^2 + 3^2 + (-6)^2} = 7$

$\therefore$ PQ के direction cosines $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{6}{7}$ हैं।

AB का PQ पर प्रक्षेप $\equiv l(x_2 - x_1) + m(y_2 - y_1) + n(z_2 - z_1)$

$$= \frac{2}{7}(-1-1) + \frac{3}{7}(4-2) - \frac{6}{7}(2-3) = \frac{-4+6+6}{7} = \frac{8}{7}$$

24. (i) **व्यवरोध** (Constraints)–समीकरण या असमिका जिनको उद्देश्य फलन में आये चर संतुष्ट करते हैं, व्यवरोध कहलाते हैं।

(ii) **रैखिक प्रोग्रामन** (Linear programming)–रैखिक प्रोग्रामन एक रैखिक फलन को है जहाँ सभी व्यवरोध भी रैखिक समीकरण या रैखिक असमिका हैं।

25. माना A = दूसरे पासे पर हमेशा 4 आने की घटना

$= \{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (5, 4), (6, 4)\}$

$n(A) = 6$

और B = घटना में शामिल अंकों का योग 8 है

$B = \{(4, 4)\}$

$\therefore \quad A \cap B = A \cap \{(4, 4)\} = \{(4, 4)\}$

$n(A \cap B) = 1$

$$\boxed{P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(A \cap B)}{n(A)} = \frac{1}{6}}$$

26. सर्वप्रथम सूत्र $P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ का प्रयोग करके इसे सरल करेंगे तथा फिर $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ के प्रयोग से $P(A \cup B)$ प्राप्त करेंगे।

दिया है, $2P(A) = P(B) = \frac{5}{13}$

$\Rightarrow \quad P(A) = \frac{5}{26}$ और $P(B) = \frac{5}{13}$

अब, $P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{P(A \cap B)}{\frac{5}{13}}$

$\Rightarrow \quad P(A \cap B) = \frac{2}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{2}{13}$

पुनः $\quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$= \frac{5}{26} + \frac{5}{13} - \frac{2}{13} = \frac{5+10-4}{26} = \frac{11}{26}$$

27. दिए गए वक्रों के कुल का समीकरण है–

$x^2 + y^2 = r^2 \quad \ldots(1)$

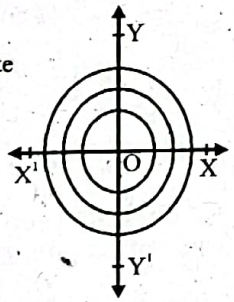
जहाँ r एक प्राचल है।

(1) के दोनों पक्षों को x के सापेक्ष differentiate करने पर हमें मिलता है,

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow x + y\frac{dy}{dx} = 0$$

यही अभीष्ट अवकल समीकरण है।



28. हमारे पास 2 उजला, 3 लाल, 4 काला और 5 हरा बॉल है। इस तरह कुल बॉल की संख्या $= 2 + 3 + 5 + 4 = 14$ होगी।

दो गेंद बिना replacement के उस बैग से निकाला जाता है। तब हमारे पास निम्न चार case हो सकता है।

S.N.	First Ball	Second Ball
Case I	White	non-white
Case II	Red	non-red
Case III	Green	non-green
Case IV	Black	non-black

अब एक-एक करके प्रत्येक केस से अभीष्ट प्रायिकता-

$$= \frac{2}{14} \times \frac{12}{13} + \frac{3}{14} \times \frac{11}{13} + \frac{15}{14} \times \frac{9}{13} + \frac{4}{14} \times \frac{10}{13}$$

$$= \frac{24}{182} + \frac{33}{182} + \frac{45}{182} + \frac{40}{182}$$

$$= \frac{24+33+45+40}{182} = \frac{142}{182} = \frac{71}{91}$$

29. दिया है, $f: \{1, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 5\}$

तथा $g: \{1, 2, 5\} \rightarrow \{1, 3\}$

क्रमशः $f = \{(1, 2), (3, 5), (4, 1)\}$

तथा $g = \{(1, 3), (2, 3), (5, 1)\}$

द्वारा परिभाषित फलन है।

$\therefore \quad gof(1) = g(f(1)) = g(2) = 3 \quad [\because f(1) = 2 \text{ तथा } g(2) = 3]$

$gof(3) = g(f(3)) = g(5) = 1 \quad [\because f(3) = 5 \text{ तथा } g(5) = 1]$

$gof(4) = g(f(4)) = g(1) = 3 \quad [\because f(4) = 1 \text{ तथा } g(1) = 3]$

$\therefore \quad gof = \{(1, 3), (3, 1), (4, 3)\}$

30. L.H.S.

$$= \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$= \left[\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)\right] + \left[\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)\right]$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{7}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{5}\times\frac{1}{8}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{10}{20} \times \frac{21}{20}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{13}{14} \times \frac{40}{39}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}\right)$$

$$= \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} = \text{R.H.S.}$$

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

31. किसी वर्ग आव्यूह A के लिए,

$$A = \frac{1}{2}(A + A') + \frac{1}{2}(A - A')$$

जहाँ $\frac{1}{2}(A + A')$ एक सममित आव्यूह है तथा $\frac{1}{2}(A - A')$ एक विषम सममित आव्यूह है।

दिया है, $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -6 & 8 & 3 \\ -4 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ $\therefore$ $A' = \begin{bmatrix} 1 & -6 & -4 \\ 3 & 8 & 6 \\ 5 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}(A+A') = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+1 & 3-6 & 5-4 \\ -6+3 & 8+8 & 3+6 \\ -4+5 & 6+3 & 5+5 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 16 & 9 \\ 1 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 8 & \frac{9}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{9}{2} & 5 \end{bmatrix} \qquad ...(1)$$

यह आव्यूह एक सममित आव्यूह है।

पुनः $\frac{1}{2}(A-A') = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-1 & 3+6 & 5+4 \\ -6-3 & 8-8 & 3-6 \\ -4-5 & 6-3 & 5-5 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 9 & 9 \\ -9 & 0 & -3 \\ -9 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{9}{2} & \frac{9}{2} \\ -\frac{9}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{9}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix} \qquad ...(2)$$

यह आव्यूह एक विषम सममित आव्यूह है।

अब $A = \frac{1}{2}(A+A') + \frac{1}{2}(A-A')$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 8 & \frac{9}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{9}{2} & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{9}{2} & \frac{9}{2} \\ -\frac{9}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{9}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

= एक सममित और एक विषम सममित आव्यूह का योग।

32. दिया है, $y = 3\cos(\log x) + 4\sin(\log x)$ ...(i)

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = y_1 = -3\sin(\log x)\frac{d}{dx}(\log x) + 4\cos(\log x)\frac{d}{dx}\log x$$

$$= -3\sin(\log x)\frac{1}{x} + 4\cos(\log x)\frac{1}{x} \qquad \left(\because \frac{dy}{dx} = y_1\right)$$

x से गुणा करने पर,

$$xy_1 = -3\sin(\log x) + 4\cos(\log x) \qquad ...(ii)$$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$xy_2 + y_1 \cdot 1 = -3\cos(\log x)\frac{d}{dx}(\log x) - 4\sin(\log x)\frac{d}{dx}\log x$$

$$= -3\cos(\log x)\frac{1}{x} - 4\sin(\log x)\frac{1}{x}$$

x से गुणा करने पर,

$$x^2y_2 + xy_1 = -[3\cos(\log x) + 4\sin(\log x)] \qquad \text{[समी. (i) से]}$$

$$\Rightarrow \quad x^2y_2 + xy_1 = -y$$

$$\therefore \quad x^2y_2 + xy_1 + y = 0$$

33. $\because y = \theta - \sin\theta \quad \therefore \frac{dy}{d\theta} = 1 - \cos\theta$

और $x = 1 - \cos\theta \quad \therefore \frac{dx}{d\theta} = \sin\theta$

अब, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

$$= \frac{1-\cos\pi/4}{\sin\pi/4} \qquad (\because \theta = \pi/4)$$

$$= \frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}-1$$

जब $\theta = \frac{\pi}{4}$, $x = 1 - \cos\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$

और $y = \frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta = \frac{\pi}{4}$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण

$$y - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} = (\sqrt{2}-1)\left(x - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

या, $y - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} = (\sqrt{2}-1)x + 2 - \frac{3}{\sqrt{2}}$

या, $y = (\sqrt{2}-1)x + \frac{\pi}{4} + 2 - 2\sqrt{2}$

34. यहाँ, दिए गए समाकलन में आंशिक भिन्नें सरलता से प्राप्त नहीं होंगी। इसलिए अंश और हर दोनों में x^{n-1} से गुणा करके आंशिक भिन्न हेतु आसान रूप में बदलेंगे और तब $x^n = t$ रखेंगे। अब, आंशिक भिन्नों का प्रयोग करेंगे और तब समाकलन करेंगे।

माना $I = \int \frac{1}{x(x^n+1)}dx = \int \frac{x^{n-1}}{x^n(x^n+1)}dx$

$x^n = t$ रखने पर,

$$\Rightarrow \quad nx^{n-1}dx = dt \qquad \Rightarrow x^{n-1}dx = \frac{1}{n}dt$$

$$\therefore \quad I = \int \frac{x^{n-1}}{x^n(x^n+1)}dx = \frac{1}{n}\int \frac{1}{t(t+1)}dt \qquad ...(i)$$

अब, $\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{(t+1)}$

$$\Rightarrow \quad 1 = A(1+t) + Bt \qquad ...(ii)$$

$t = 0, -1$ समी० (ii) में रखने पर, $A = 1$ और $B = -1$

$$\therefore \quad \frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{(t+1)}$$

$$\therefore \quad I = \frac{1}{n}\int\left[\frac{1}{t} - \frac{1}{(t+1)}\right]dt \qquad \text{[समी० (i) से]}$$

$$= \frac{1}{n}[\log|t| - \log|t+1|] + C$$

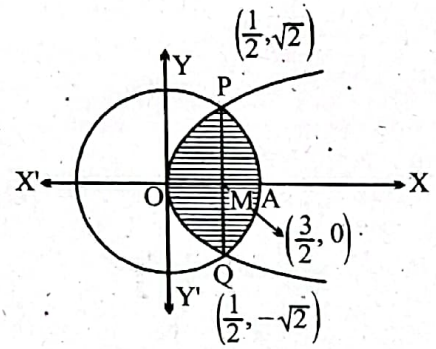
A-ONE PRAKASHAN PATNA

$$= \frac{1}{n}\left[\log|x^n| - \log|x^n+1|\right] + C$$

($t = x^n$ रखने पर)

$$= \frac{1}{n}\log\left|\frac{x^n}{x^n+1}\right| + C$$

35. $y^2 = 4x$ एक परवलय है जिसका शीर्ष मूल बदु और अक्ष x-अक्ष है। $4x^2 + 4y^2 = 9$ एक दीर्घवृत्त को निरूपित करता है।



समीकरणों $y^2 = 4x$ एवं $4x^2 + 4y^2 = 9$ को हल करने पर हम पाते हैं कि

$4x^2 + 16x = 9$

$\Rightarrow \quad 4x^2 + 16x - 9 = 0$

$\Rightarrow \quad 4x^2 + 18x - 2x - 9 = 0$

$\Rightarrow \quad 2x(2x+9) - 1(2x+9) = 0$

$\Rightarrow \quad (2x+9)(2x-1) = 0$

$\Rightarrow \quad x = \frac{-9}{2}, \frac{1}{2}$

परन्तु $x \neq \frac{-9}{2}$, अत: $x = \frac{1}{2}$;

जब $x = \frac{1}{2}$ तो $y^2 = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$

अत: दोनों वक्रों के कटान बिंदु P एवं Q के नियामक $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$ एवं $\left(\frac{1}{2}, -\sqrt{2}\right)$ हैं।

अत: अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षेत्र APOQA का क्षेत्रफल = 2(क्षेत्र APOA का क्षेत्रफल)

= 2[क्षेत्र OPMO का क्षेत्रफल + क्षेत्र MPAM का क्षेत्रफल]

$$= 2\left[\int_0^{\frac{1}{2}} 2\sqrt{x}\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{9}{4} - x^2}\,dx\right]$$

$$= 2\left[2 \times \frac{2}{3}\left\{x^{\frac{3}{2}}\right\}_0^{\frac{1}{2}} + \left\{\frac{x\sqrt{\frac{9}{4} - x^2}}{2} + \frac{9}{8}\sin^{-1}\frac{x}{\frac{3}{2}}\right\}_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= 2\left[\frac{4}{3} \times \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - 0\right) + 0 + \frac{9}{8}\sin^{-1}1 - \left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{9}{4} - \frac{1}{4}} + \frac{9}{8}\sin^{-1}\frac{1}{3}\right)\right]$$

$$= 2\left[\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{9}{8} \times \frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{4} \times \sqrt{2} + \frac{9}{8}\sin^{-1}\frac{1}{3}\right)\right]$$

$$= 2\left[\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{9\pi}{16} - \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{9}{8}\sin^{-1}\frac{1}{3}\right] = 2\left[\frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{9\pi}{16} - \frac{9}{8}\sin^{-1}\frac{1}{3}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{9\pi}{8} - \frac{9}{4}\sin^{-1}\frac{1}{3}\right]$$ वर्ग इकाइयाँ।

36. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0 \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = -\vec{c}$

$\Rightarrow \quad (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b} = (-\vec{c}) \times \vec{b}$

[दोनों तरफ $\vec{b}$ से सादिश गुणन लेने पर]

$\Rightarrow \quad (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{b} \times \vec{b}) = (-\vec{c}) \times \vec{b}$ [वितरण नियम से]

$\Rightarrow \quad (\vec{a} \times \vec{b}) + 0 = (\vec{b} \times \vec{c})$

[$\because \vec{b} \times \vec{b} = 0$ तथा $(-\vec{c}) \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c}$]

$\Rightarrow \quad (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \times \vec{c}$ ...(1)

पुन:, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$

$\Rightarrow \quad \vec{b} + \vec{c} = -\vec{a}$

$\Rightarrow \quad (\vec{a} + \vec{c}) \times \vec{c} = (-\vec{a}) \times \vec{c}$

[दोनों तरफ c से cross product लेने पर]

$\Rightarrow \quad (\vec{b} \times \vec{c}) + (\vec{c} \times \vec{c}) = (-\vec{a}) \times \vec{c}$ [वितरण नियम से]

$\Rightarrow \quad (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{0} = \vec{c} \times \vec{a}$

[$\because \vec{c} \times \vec{c} = \vec{0}$ तथा $(-\vec{a}) \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$]

$\Rightarrow \quad \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$ ...(2)

(1) तथा (2) से हमें मिलता है, $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$

37. हमको उद्देश्य फलन $Z = x + 2y$ ...(i)

का निम्नतम तथा उच्चतम मान निम्न व्यवरोधों के अंतर्गत ज्ञात करना है।

$x + 2y \geq 100$ ...(ii)

$2x - y \leq 0$ ...(iii)

$2x + y \leq 200$ ...(iv)

$x \geq 0, y \geq 0$ ...(v)

सर्वप्रथम रेखा $x + 2y = 100$ का ग्राफ खींचते हैं।

x	0	100
y	50	0

(0, 0) असमिका $x + 2y \geq 100$ में रखने पर,

$0 + 2 \times 0 \geq 100$

$\Rightarrow \quad 0 \geq 100$ (जो कि असत्य है)

अत: अर्द्धतल मूलबिंदु के विपरीत ओर है।

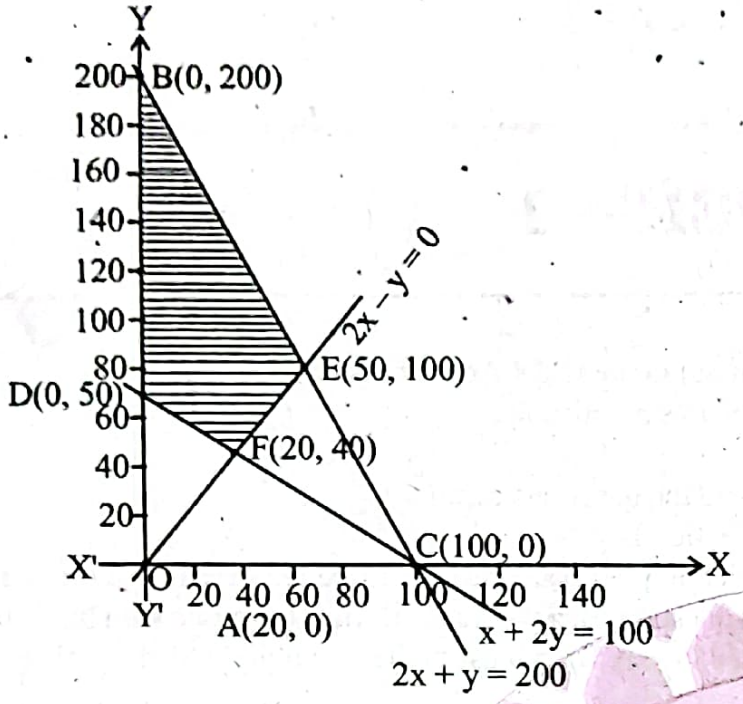
अब रेखा $2x + y = 0$ का ग्राफ खींचते हैं।

x	0	10
y	0	20

(5, 0) असमिका $2x - y \leq 0$ में रखने पर,

$2 \times 5 - 0 \leq 0 \quad \Rightarrow 10 \leq 0$ (जो कि असत्य है)

अत: अर्द्धतल y-अक्ष की ओर है।



अब, रेखा $2x+y=200$ का ग्राफ खींचते हैं।

x	0	100
y	200	0

(0, 0) असमिका $2x+y\le 200$ में रखने पर,

$2\times 0+0\le 200 \quad \Rightarrow 0\le 200$ (जो कि सत्य है)

अतः अर्द्धतल मूलबिंदु की ओर होगा। चूँकि $x, y\ge 0$, अतः सुसंगत क्षेत्र प्रथम चतुर्थांश में स्थित है। समीकरण $2x-y=0$ तथा $x+2y=100$ हल करने पर प्रतिच्छेद बिंदु B(20, 40) तथा समीकरण $2x-y=0$ तथा $2x+y=200$ को हल करने पर प्रतिच्छेद बिंदु C(50, 100) होता है।

अतः सुसंगत क्षेत्र ABCDA है।

इस प्रकार सुसंगत क्षेत्र के शीर्ष बिंदु A(0, 50), B(20, 40), C(50, 100) तथा D(0, 200) हैं। इन शीर्ष बिंदुओं पर Z का मान निम्न है–

शीर्ष बिंदु	$Z=x+2y$
A(0, 50)	100 → न्यूनतम
B(20, 40)	100 → न्यूनतम
C(50, 100)	250
D(0, 200)	400 → अधिकतम

अतः Z का अधिकतम मान 400 है जो कि D(0, 200) पर प्राप्त होता है तथा Z का निम्नतम मान 100 है जो कि बिंदुओं A(0, 50) तथा B(20, 40) को जोड़ने वाली रेखा के प्रत्येक बिंदु पर प्राप्त होता है।

38. मान लीजिए घटना E_1 'खो गया पत्ता ईंट होने' को दर्शाता है

$\Rightarrow \quad n(E_1)=13$

E_2 घटना 'खो गया पत्ता ईंट नहीं होने' को दर्शाता है

$\Rightarrow \quad n(E_2)=52-13=39$

तथा प्रतिदर्श समष्टि $n(S)=52$

तब, E_1 तथा E_2 परस्पर अपवर्जी तथा परिपूर्ण घटना है।

$$\therefore \quad P(E_1)=\frac{13}{52}=\frac{1}{4} \text{ तथा } P(E_2)=\frac{39}{52}=\frac{3}{4}$$

मान लीजिए E घटना 'शेष पत्तों में से निकाले गए दो पत्ते ईंट के होने' को निरूपित करता है। तथा अब ताश के 51 पत्तों की गड्डी में से शेष ईंट के पत्तों की संख्या 12 होगी जबकि एक खोया गया ईंट का पत्ता हो। अब इन 12 ईंट के पत्तों में से ईंट के पत्ते निकालने के कुल तरीके $^{12}C_2$ हो सकते हैं।

इसी प्रकार, 51 पत्तों की गड्डी में से दो ईंट के पत्ते निकालने के कुल $^{51}C_2$ तरीके हो सकते हैं। अतः दो पत्तों को प्राप्त करने की प्रायिकता जब एक ईंट का पत्ता खो गया हो, को $P\left(\frac{E}{E_1}\right)$ के द्वारा प्राप्त करते हैं।

$$\therefore \quad P\left(\frac{E}{E_1}\right)=P \text{ (जब खो गया पत्ता ईंट का है, तब शेष पत्तों में से निकाले गए पत्ते ईंट के हों)}$$

$$=\frac{^{12}C_2}{^{51}C_2}=\frac{\frac{12\times 11}{1\times 2}}{\frac{51\times 50}{1\times 2}}=\frac{12\times 11}{51\times 50}$$

अतः अभीष्ट प्रायिकता बंटन निम्नलिखित है–

X	0	1	2
P(X)	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

X की प्रत्याशा = चर X की माध्य

$$=\sum XP(X)=0\times\frac{25}{36}+1\times\frac{10}{36}+2\times\frac{1}{36}=\frac{10}{36}+\frac{2}{36}=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$$

✧❖✧