MODEL PAPER – 4

समय : 3 घंटे 15 मिनट] [पूर्णांक : 100

परीक्षार्थी के लिए निर्देश :

1. परीक्षार्थी यथासंभव अपने शब्दों में ही उत्तर दें।
2. दाहिनी ओर हाशिये पर दिए हुए अंक पूर्णांक निर्दिष्ट करते है।
3. इस प्रश्न-पत्र को ध्यानपूर्वक पढ़ने के लिए 15 मिनट का अतिरिक्त समय दिया गया है।
4. यह प्रश्न-पत्र दो खण्डों में है—खण्ड-अ एवं खण्ड-ब।
5. खण्ड-अ में 100 वस्तुनिष्ठ प्रश्न है, इनमें से केवल 50 वस्तुनिष्ठ प्रश्न का उत्तर देना है। (प्रत्येक के लिए 1 अंक निर्धारित है), इनका उत्तर उपलब्ध कराये गये OMR Answer Sheet में दिए गए सही वृत्त को काले/नीले बॉल पेन से भरे। किसी भी प्रकार के ह्वाइटनर/तरल पदार्थ/ब्लेड/नाखून आदि का उत्तर पत्रिका में प्रयोग करना मना है, अथवा परीक्षा परिणाम अमान्य होगा।
6. खण्ड-ब में 30 लघु उत्तरीय प्रश्न हैं। (प्रत्येक के लिए 2 अंक निर्धारित है), जिनमें से किसी 15 प्रश्नों का उत्तर देना अनिवार्य है। इनके अतिरिक्त इस खण्ड में 8 दीर्घ उत्तरीय प्रश्न दिए गए हैं। (प्रत्येक के लिए 5 अंक निर्धारित है।) जिनमें से किन्हीं 4 प्रश्नों का उत्तर देना है।
7. किसी प्रकार के इलेक्ट्रॉनिक उपकरण का प्रयोग पूर्णतया वर्जित है।

खण्ड – अ : वस्तुनिष्ठ प्रश्न

निर्देश : प्रश्न-संख्या 1 से 100 में से केवल 50 वस्तुनिष्ठ प्रश्नों का चयन करें। चुने गए प्रश्न के सही विकल्प को चिह्नित कर OMR Answer-Sheet में रंजित करें। $50 \times 1 = 50$

1. $\tan\left[\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{2}\right]=$

(A) 1 (B) 0 (C) 2 (D) 3

2. यदि $x = a\sec\theta, y = b\tan\theta$ तब $\frac{dy}{dx}=$

(A) $\frac{b}{a}\sec\theta$ (B) $\frac{b}{a}\operatorname{cosec}\theta$ (C) $\frac{b}{a}\cot\theta$ (D) $\frac{b}{a}$

3. $\int \frac{x^3dx}{1+x^8}=$

(A) $\tan^{-1}x^4 + c$ (B) $4\tan^{-1}x^4 + c$

(C) $\frac{1}{4}\tan^{-1}x^4 + c$ (D) $2\tan^{-1}x^4 + c$

4. अवकल समीकरण $xy\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y\frac{dy}{dx}=0$ की कोटि और घात है :

(A) कोटि = 2, घात = 1 (B) कोटि= 2, घात = 2
(C) कोटि = 1, घात = 2 (D) कोटि = 1, घात = 1

5. $|\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}|=$

(A) $\sqrt{3}$ (B) 3 (C) $\sqrt{2}$ (D) 2

6. तल $3x - 5y + 4z = 11$ के समांतर तल का समीकरण है :

(A) $3x - 5y + 4z = 21$ (B) $3x + 5y + 4z = 25$
(C) $3x + 5y + 4z = 35$ (D) इनमें से कोई नहीं

7. $Z = 3x + 5y$ का न्यूनतम मान जहाँ कि व्यवरोध $x+y\le 2, x\ge 0, y\ge 0$ है :

(A) 16 (B) 15
(C) 0 (D) इनमें से कोई नहीं

8. यदि $A=\begin{bmatrix}2 & \sqrt{2} & 0\\ 3 & -2 & \frac{2}{5}\end{bmatrix}$ तो $A' =$

(A) $\begin{bmatrix}2 & -3\\ \sqrt{2} & 2\\ 0 & 2/5\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}2 & 3\\ \sqrt{2} & -2\\ 0 & 2/5\end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix}3 & 2\\ -2 & \sqrt{2}\\ -2/5 & 0\end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix}3 & -2 & 2/5\\ 3 & \sqrt{2} & 0\end{bmatrix}$

9. $5\begin{bmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{bmatrix}=$

(A) $\begin{bmatrix}25 & 30\\ 35 & 8\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}25 & 30\\ 35 & 40\end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix}5 & 6\\ 35 & 40\end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix}25 & 30\\ 25 & 40\end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix}13 & 15\\ -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}=$

(A) $\begin{bmatrix}13 & 15\\ -1 & 4\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}15 & 0\\ 0 & 8\end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix}26 & 30\\ -2 & 8\end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix}13 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix}$

11. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}\sec 4x\right)=$

(A) $\sec 4x.\tan 4x$ (B) $\sec^2 4x$
(C) $\tan^2 4x$ (D) $\frac{1}{16}\sec 4x\cdot\tan 4x$

12. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+\frac{2y}{x}=5x^2$ का समाकलन गुणक है :

(A) $\frac{2}{x}$ (B) $2e^x$
(C) $2\log x$ (D) x^2

13. $(2\vec{i}-3\vec{j}).(\vec{i}+\vec{k})=$

(A) 2 (B) −1 (C) 3 (D) 0

14. $(11\vec{i}-7\vec{j}-\vec{k}).(8\vec{i}-\vec{j}-5\vec{k})=$

(A) 95 (B) 100 (C) 400 (D) 88

15. $\vec{i}.\vec{i}=$

(A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) $\vec{j}$

16. $\int \frac{3\cos x-2\sin x}{2\cos x+3\sin x}dx=$

(A) $2\cos x+3\sin x+k$ (B) $\log|2\cos x+3\sin x|+k$

(C) $\tan^{-1}\left(3\sin\frac{x}{2}\right)+k$ (D) $2\tan\frac{x}{2}+k$

17. $\int \frac{3x^2+2}{x^3+2x}dx=$

(A) $\sin^{-1}(x^3+2x)+k$ (B) $\tan^{-1}(3x^2+2)+k$

(C) $\log|3x^2+2|+k$ (D) $\log|x^3+2x|+k$

18. $\begin{vmatrix}1&1&5\\4&9&17\\5&10&22\end{vmatrix}=$

(A) 264 (B) 1221 (C) 0 (D) 1

19. $|x|\geq 1, \tan\left[\frac{2}{3}\left(\tan^{-1}x+\cot^{-1}x\right)\right]=$

(A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) 0 (D) 1

20. $|x|\leq 1, 2\tan^{-1}x=$

(A) $\tan^{-1}2x$ (B) $\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$

(C) $\cos^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$ (D) $\tan^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$

21. सरल रेखा $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-5}{6}$ के दिक् अनुपात है :

(A) 1, –2, 5 (B) 3, 2, 5
(C) 3, 3, 6 (D) 1, 3, 5

22. $P(E)=\frac{3}{7}, P(F)=\frac{5}{7}, P(E\cup F)=\frac{6}{7}\Rightarrow P(E\cap F)=$

(A) $\frac{4}{7}$ (B) $\frac{2}{7}$ (C) $\frac{1}{7}$ (D) $\frac{3}{7}$

23. संबंध $R = \{(1, 3), (4, 2), (2, 4), (2, 3), (3, 1)\}$ समुच्चय $A = \{1, 2, 3, 4\}$ पर कैसा संबंध है ?

(A) स्वतुल्य (B) संक्रामक
(C) सममित (D) इनमें से कोई नहीं

24. $2\tan^{-1}x=$

(A) $\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$ (B) $\sin^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$

(C) $\sin^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$ (D) $\sin^{-1}\frac{1+x^2}{1-x^2}$

25. $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=$

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) π (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) 2π

26. अवकल समीकरण $xdx+ydy=0$ का हल है :

(A) $x^2+y^2=c$ (B) $x^2-y^2=c$
(C) $x+y=c$ (D) इनमें से कोई नहीं

27. $\vec{j}.\vec{j}=$

(A) 0 (B) 1 (C) $\vec{i}$ (D) $\vec{k}$

28. $|3\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k}|=$

(A) 38 (B) $\sqrt{38}$ (C) 10 (D) 30

29. $\frac{d}{dx}(e^x)$

(A) e^x (B) e^{-x} (C) e^{2x} (D) e^{3x}

30. $\int_{-2}^{2}|x|\,dx=$

(A) 0 (B) 2 (C) 1 (D) 4

31. $\int 1.dx=$

(A) $x+k$ (B) $1+k$ (C) $\frac{x^2}{2}+k$ (D) $\log x+k$

32. यदि A और B दो घटनाएँ इस प्रकार है कि $P(A/B) = P(B/A) \neq 0$, तब :

(A) $A\subset B$ लेकिन $A\neq B$ (B) $A=B$
(C) $A\cap B=\phi$ (D) $P(A)=P(B)$

33. यदि A, B और C तीन स्वतंत्र घटनाएँ हों, तो :

(A) $P(ABC)=P(A)+P(B)+P(C)$
(B) $P(ABC)=P(A)-P(B)-P(C)$
(C) $P(ABC)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$
(D) इनमें से कोई नहीं

34. $\int_0^{\pi/2}\sin^2 x dx=$

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $-\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $-\frac{\pi}{2}$

35. $\begin{vmatrix}10&2\\35&7\end{vmatrix}=$ .....

(A) 4 (B) 0 (C) 3 (D) 6

36. $\frac{d}{dx}(\sin 2x)=$

(A) $\cos 2x$ (B) $\frac{\cos 2x}{2}$

(C) $2\sin 2x$ (D) $2\cos 2x$

37. यदि संक्रिया $*$, $a*b=2a+b$ से परिभाषित हो, तो $(2*3)*4$ है :

(A) 18 (B) 17 (C) 19 (D) 21

38. $\text{cosec}^{-1}(-x)=$

(A) $\frac{\pi}{2}-\text{cosec}^{-1}x$ (B) $\pi-\text{cosec}^{-1}x$

(C) $\text{cosec}^{-1}x$ (D) $-\text{cosec}^{-1}x$

39. $\sin^{-1}\frac{1}{x} = ?$

(A) $\sec^{-1} x$ (B) $\operatorname{cosec}^{-1} x$
(C) $\tan^{-1} x$ (D) $\sin x$

40. यदि $y = \sec^{-1}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$, तो $\frac{dy}{dx} =$

(A) 1 (B) π (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) 0

41. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) =$

(A) 1 (B) 0 (C) a^2+b^2 (D) a^2-b^2.

42. यदि बिन्दु A और B के स्थिति सदिश क्रमशः (1, 2, 3) और (–3, –4, 0) हो, तो $\vec{AB} =$

(A) $4\vec{i}+6\vec{j}+3\vec{k}$ (B) $-4\vec{i}-6\vec{j}-3\vec{k}$
(C) $-3\vec{i}-8\vec{k}$ (D) $-3\vec{i}-8\vec{j}$

43. अवकल समीकरण $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 9y = \sin x$ की कोटि है :

(A) 3 (B) 4
(C) 2 (D) इनमें से कोई नहीं

44. z का अधिकतम मान $z = 4x + 2y$ प्रतिबन्ध $2x + 3y \le 18$, $x + y \ge 10x$, $y \le 0$ के अंतर्गत है :

(A) 36 (B) 40
(C) 30 (D) इनमें से कोई नहीं

45. $\int \frac{dx}{1+x^2} =$

(A) $\cot^{-1} x + C$ (B) $\tan^{-1} x + C$
(C) $\sec^{-1} x + C$ (D) $\operatorname{cosec}^{-1} + C$

46. यदि A और B दो स्वतंत्र घटनाएँ हों तो :

(A) P (AB') = P(A) P(B) (B) P (AB') = P(A) P(B')
(C) P (AB) = P (A)+P (B) (D) (PAB) = P(A) + P (B)

47. यदि $P(A) = \frac{3}{8}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ और $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ तो $P(A' \cap B') =$

(A) $\frac{13}{8}$ (B) $\frac{13}{4}$ (C) $\frac{13}{24}$ (D) $\frac{13}{9}$

48. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow A' =$

(A) $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

49. $\left[\vec{I}\ \vec{J}\ \vec{K}\right]$ का मान है :

(A) 1 (B) 0
(C) –1 (D) इनमें से कोई नहीं

50. $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) =$

(A) $(\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}.\vec{c})\vec{a}$ (B) $(\vec{a}.\vec{b})\vec{c} - (\vec{b}.\vec{c})\vec{a}$
(C) $(\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$ (D) $(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c} - (\vec{a}\times\vec{b})\vec{b}$

51. बिन्दु (0, –1, 3) से तल $2x + y - 2z + 1 = 0$ पर लंब की लंबाई है :

(A) 0 (B) $2\sqrt{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) 2

52. $\sin^{-1} x =$

(A) $\cot^{-1} x$ (B) $\frac{1}{\cot^{-1} x}$ (C) $\operatorname{cosec}^{-1}\frac{1}{x}$ (D) $-\cot^{-1} x$

53. $\sin(\sec^{-1} x + \operatorname{cosec}^{-1} x) =$

(A) 1 (B) –1 (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{\pi}{3}$

54. $\frac{d}{dx}\left\{\lim_{x\to a}\cos 3x\right\} =$

(A) $-\sin 3x$ (B) 1 (C) $-\sin 3x$ (D) 0

55. $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2+ax+1}\right) =$

(A) $\frac{x+a}{2\sqrt{x^2+ax+1}}$ (B) $\frac{2x+a}{2\sqrt{x^2+ax+1}}$
(C) $\frac{2x+a}{\sqrt{x^2+ax+1}}$ (D) $\frac{1}{2\sqrt{x^2+ax+1}}$

56. $\int e^x(\cot x + \log\sin x)dx = ?$

(A) $e^x \log\sin x + k$ (B) $e^x \cot x + k$
(C) $e^x \sin x + k$ (D) $e^x \cos x + k$

57. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = ?$

(A) $\tan x - \cot x + k$ (B) $\tan x + \cot x + k$
(C) $-\tan x + \cot x + k$ (D) $-\tan x - \cot x + k$

58. बिंदु (1, 0, 2) का स्थिति सदिश है :

(A) $\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$ (B) $\hat{i}+2\hat{j}$
(C) $\hat{i}+3\hat{k}$ (D) $\hat{i}+2\hat{k}$

59. $\bar{k}\times\bar{j} =$

(A) 0 (B) 1 (C) $\bar{i}$ (D) $-\bar{i}$

60. यदि $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 18 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 18 & 6 \end{vmatrix}$ तब x का मान है :

(A) 6 (B) ± 6 (C) –1 (D) 6, 6

61. $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix} = ?$

(A) 0 (B) $(c-b)(b-c)(c-a)$
(C) $a^2+b^2+c^2$ (D) कोई नहीं (None)

62. $\frac{d}{dx}[\log(\sec x+\tan x]=$

(A) $\frac{1}{\sec x+\tan x}$ (B) $\sec x$

(C) $\tan x$ (D) $\sec x+\tan x$

63. यदि $x^2y^3=(x+y)^5$ तो $\frac{dy}{dx}$

(A) $\frac{x}{y}$ (B) $\frac{y}{x}$ (C) $\frac{-y}{x}$ (D) $\frac{-x}{y}$

64. $\int\cot^2x\,dx=$

(A) $\cot x-x+c$ (B) $-\cot x-x+c$

(C) $-2\cot x\cdot\operatorname{cosec}^2x+c$ (D) $-\operatorname{cosec}^2x+c$

65. $\int_{-2}^{2}\frac{|x|}{x}dx=$

(A) 4 (B) $\log 2$ (C) 0 (D) 1

66. अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2}+x^3\left(\frac{dy}{dx}\right)^3=x^4$ की कोटि है :

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 3

67. यदि $f:R\to R$ इस तरह से परिभाषित हो कि $f(x)=2x+3$ तो $f^{-1}(x)=$

(A) $2x-3$ (B) $\frac{x-3}{2}$

(C) $\frac{x+3}{2}$ (D) इनमें से कोई नहीं

68. $\sin(\sin^{-1}x)=$

(A) $\sin x$ (B) $\cos x$

(C) x (D) $\pi-x$

69. $3\sec^{-1}\frac{1}{x}-\sin^{-1}(4x^3-3x)=$

(A) π (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{3\pi}{2}$ (D) कोई नहीं

70. यदि $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$ तो A^2 है :

(A) 27 A (B) 2A (C) 3A (D) 1

71. $\int\frac{\sec^2(\log x)}{x}dx=?$

(A) $\tan(\log x)+k$ (B) $-\tan(\log x)+k$

(C) $\cot(\log x)+k$ (D) $-\cot(\log x)+k$

72. $\int\sin\theta\cdot\operatorname{cosec}\theta\,d\theta=$

(A) $\sin\theta+k$ (B) $\operatorname{cosec}\theta+k$

(C) $\frac{\sin^2\theta}{2}+k$ (D) $\theta+k$

73. यदि $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k},\vec{b}=4\vec{i}-5\vec{j}+3\vec{k}$, तो $\vec{a}.\vec{b}=$

(A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 7

74. $j\times k=$

(A) $\vec{i}$ (B) $-\vec{i}$ (C) $\vec{0}$ (D) 1

75. यदि $A=\{1,2,3\}$, $B=\{6,7,8\}$ तथा $f:A\to B$ एक फलन है इस प्रकार कि $f(x)=x+5$, तो f निम्नलिखित में से किस प्रकार का फलन है ?

(A) अंतःक्षेपी (B) एकैक आच्छादक

(C) अनेकैक आच्छादक (D) अचर फलन

76. यदि $n(A)=3$ तथा $n(B)=2$ तो $n(A\times B)=$ ....

(A) 6 (B) 4 (C) 2 (D) 0

77. $\frac{d}{dx}(e^{\cos x})=?$

(A) $(\sin x)\,e^{\cos x}$ (B) $-(\sin x)\,e^{\cos x}$

(C) $(\cos x)\,e^{\cos x}$ (D) $-(\cos x)\,e^{\cos x}$

78. $\frac{d}{dx}(\sin 4x)=?$

(A) $4\sin 4x$ (B) $4\cos 4x$

(C) $4x\sin x$ (D) $4x\cos 4x$

79. $\int_0^1\frac{dx}{x+1}=$

(A) $\log 2$ (B) $-\log 2$

(C) $2\log 2$ (D) $-2\log 2$

80. $\int_0^{\pi/2}\log\cot\theta\cdot d\theta=$

(A) $\frac{\pi}{2}\log 2$ (B) $\frac{\pi}{4}\log 2$

(C) $2\pi\log 2$ (D) 0

81. $\int\tan x\,dx=?$

(A) $\log|\sec x|+k$ (B) $\log|\sin x|+k$

(C) $\log|\cos x|+k$ (D) $\log|\operatorname{cosec} x|+k$

82. $[\vec{a}\ \vec{a}\ \vec{a}]=$

(A) 1 (B) 0 (C) $\vec{a}$ (D) -1

83. यदि $P(A)=\frac{3}{8}$, $P(B)=\frac{1}{2}$ और $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$ तो $P\left(\frac{A'}{B}\right)=$

(A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{5}{8}$ (D) $\frac{3}{8}$

84. यदि A एक वर्ग आव्यूह हो तो $A+A'$ एक ..... होगा।

(A) सममित आव्यूह (B) विषम सममित आव्यूह

(C) शून्य आव्यूह (D) एकांक आव्यूह

85. $\frac{d}{dx}[\log x]=?$

(A) $\frac{1}{x}$ (B) $-\frac{1}{x^2}$ (C) 1 (D) $\frac{1}{x^2}$

86. $\frac{d}{dx}(\sqrt{\tan x}) = ?$

(A) $2\sqrt{\tan x}$ (B) $\frac{\sec^2 x}{2\sqrt{\tan x}}$

(C) $2\tan x$ (D) $\frac{\sec x}{2\sqrt{\tan x}}$

87. एक जोड़ा पासा को फेंका जाता है। दोनों पर सम अभाज्य संख्या पाने की प्रायिकता है :

(A) $\frac{1}{36}$ (B) $\frac{1}{12}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) 0

88. यदि $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 4 \\ 6 & x \end{vmatrix}$ तब x का मान है :

(A) ± 2 (B) $\pm (0.5)$

(C) $\pm\sqrt{3}$ (D) $\pm\frac{1}{3}$

89. अवकल समीकरण $\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$ का हल है :

(A) $xy = k$ (B) $\frac{x}{y} = k$

(C) $x + y = k$ (D) $x - y = k$

90. यदि $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}$ तथा $\overrightarrow{OB} = 3\vec{i} + 6\vec{j} + 5\vec{k}$ तो $\overrightarrow{AB}$ =

(A) $\vec{i} + \vec{j} + 7\vec{k}$ (B) $5\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

(C) $\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}$ (D) $\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$

91. yz – तल का समीकरण है :

(A) $y = 0, z = 0$ (B) $x = 0$

(C) $y = 0$ (D) $x = 1$

92. यदि w, समीकरण $x^3 - 1 = 0$ का एक अवास्तविक मूल हो, तो :

$$\begin{vmatrix} 1 & w^2 & 1+w^2 \\ 1+w^2 & 1 & w^2 \\ w^2 & 1+w^2 & 1 \end{vmatrix} =$$

(A) 2 (B) 4 (C) –4 (D) 0

93. यदि $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ तो $\vec{a}$ की दिशा में संगत इकाई सदिश $\hat{a}$ =

(A) $\frac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{6}}$ (B) $\frac{\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{6}}$

(C) $\frac{\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}}{6}$ (D) इनमें से कोई नहीं

94. सदिश $3\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}$ दिक् कोज्याएँ है :

(A) $\frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{12}{13}$ (B) $\frac{3}{13}, \frac{-4}{13}, \frac{12}{13}$

(C) $\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{4}{\sqrt{13}}, \frac{12}{\sqrt{13}}$ (D) $\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{-4}{\sqrt{13}}, \frac{12}{\sqrt{13}}$

95. $f: A \to B$ अंत:क्षेपी होगा, यदि :

(A) $f(A) \subset B$ (B) $f(A) = B$

(C) $B \subset f(A)$ (D) $f(B) \subset A$

96. $\tan^{-1}\sqrt{3} - \sec^{-1}(-2)$ के बराबर है :

(A) π (B) $-\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{2\pi}{3}$

97. $\tan^{-1}(1) + \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) =$

(A) 0 (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{3\pi}{4}$ (D) कोई नहीं

98. $\begin{vmatrix} \sin 20^\circ & -\cos 20^\circ \\ \sin 70^\circ & \cos 70^\circ \end{vmatrix} = ?$

(A) 1 (B) –1

(C) 0 (D) 2

99. यदि $2\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$ तो—

(A) $(x = -2, y = 8)$ (B) $(x = 2, y = -8)$

(C) $(x = 3, y = -6)$ (D) $(x = -3, y = 6)$

100. $\int \text{cosec}^2 x\, dx = ?$

(A) $\tan x + c$ (B) $-\cot x + c$

(C) $2\,\text{cosec}\, x + c$ (D) $-2\,\text{cosec}\, x + c$

खण्ड – ब : गैर-वस्तुनिष्ठ प्रश्न

लघु उत्तरीय प्रश्न

निर्देश : प्रश्न-संख्या 1 से 30 तक लघु उत्तरीय प्रश्न है। इनमें से केवल 15 प्रश्नों का उत्तर दें। **15 × 2 = 30**

1. $\frac{dy}{dx}$ निकालें, जब $(\sin y)^x = (\cos x)^y$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}}$ का समाकलन करें।

3. हल करें : $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$

4. मान ज्ञात करें : $\cot^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$

5. सिद्ध करें कि :

$$2\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$$

6. सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग कर दर्शाइए कि

$$\begin{vmatrix} x+y & 2x & 2x \\ 2x & x+y & 2x \\ 2x & 2x & x+y \end{vmatrix} = (5x + y)(y - x)^2$$

7. यदि $\begin{vmatrix} x & x \\ 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ तो x ज्ञात करें।

8. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ है तो $2A - B$ ज्ञात करें।

9. $\frac{dy}{dx}$ निकालें : $x^{\sin x}$

10. $\frac{dy}{dx}$ निकालें : $(\log x)^{\cos x}$

11. $\frac{dy}{dx}$ निकालें : $\tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$

12. $\frac{dy}{dx}$ निकाले यदि $x = \cos\theta - \cos 2\theta$, $y = \sin\theta - \sin 2\theta$

13. सिद्ध कीजिए कि R में दिया गया फलन $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 100$ वर्धमान है।

14. $\int \frac{\log x}{x} dx = ?$

15. हल करें : $\int (1-x)\sqrt{x}dx$

16. $\int_0^{\pi/4} \sqrt{1-\sin 2x}\, dx$ को हल करें।

17. मान ज्ञात करें : $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}}$

18. $\frac{dy}{dx} = 1 + x^2y^2 + x^2 + y^2$ को हल करें।

19. यदि $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$, $-\hat{i}+a\hat{j}+2\hat{k}$ एकतलीय हो, तो a का मान निकालें।

20. यदि $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$ तथा $\vec{b} = -7\hat{i} + 6\hat{j} + 8\hat{k}$, तब $\vec{a} \times \vec{b}$ ज्ञात करें।

21. यदि E और F इस प्रकार की घटनाएँ हैं कि $P(E) = 0.6$, $P(F) = 0.3$ और $P(E \cap F) = 0.2$ तो $P(E/F)$ और $P(F/E)$ ज्ञात करें।

22. यह दिया गया है कि दो पासों को फेंकने पर प्राप्त संख्याएँ भिन्न-भिन्न है। दोनों संख्याओं का योग 4 होने की प्रायिकता ज्ञात करें।

23. एक थैले में 6 लाल, 4 नीली तथा 2 पीली गेंद है। तीन गेंद एक के बाद एक निकाली जाती है। ठीक एक गेंद के लाल होने की क्या प्रायिकता है ?

24. अक्षों से समान झुकाव वाली रेखा का समीकरण निकालें जो बिन्दु (2, –1, 2) से गुजरती है।

25. समतल $2x - 3y + 6z + 21 = 0$ से मूल बिन्दु तक खींचे गए लम्ब की लम्बाई बताइए।

26. यदि $f: R \to R, f(x) = x^2 - 3x + 2$ द्वारा परिभाषित है, तो $f\{(x)\}$ निकालें।

27. सिद्ध करें कि $\tan^{-1}\frac{2}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{12} = \frac{\pi}{4}$

28. यदि $\vec{a} = (2,3,-5)$ और $\vec{b} = (2,2,2)$ तो सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण ज्ञात करें।

29. वक्र $x^2 + y^2 = 3$ के बिन्दु $(1, \sqrt{2})$ पर ढाल निकालें।

30. निम्न से x का मान ज्ञात कीजिए :

$$\begin{pmatrix} 2x-y & 5 \\ 3 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

निर्देश : प्रश्न-संख्या 31 से 38 तक दीर्घ उत्तरीय प्रश्न है। किन्हीं 4 प्रश्नों का उत्तर दें। **4 × 5 = 20**

31. तलों $2x - y + z + 8 = 0$ और $x + y + 2z - 14 = 0$ के बीच का न्यूनकोण ज्ञात करें।

32. x निकालें यदि $[x \ -5 \ -1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$

33. **दर्शाइए :** $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

34. निम्नांकित LPP का आलेखीय हल निकालें :
न्यूनतमीकरण करें $z = 5x + 7y$
जबकि, $x + y \le 4$
$3x + 8y \le 24$
$10x + 7y \le 35$
$x, y \ge 0$

35. समीकरण को हल करें :
$(\tan^{-1}y - x)\, dy + (1 + y^2)\, dx$

36. $\int_0^{\pi/4} \log(1+\tan x)dx$ का मान निकालें।

37. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ एवं कोटियों $x = 0$ तथा $x = ae$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करें, जहाँ $b^2 = a^2(1 - e^2)$ एवं $e < 1$ है।

38. यदि $\vec{a}.\vec{b} = \vec{a}.\vec{c}$ एवं $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}, a \neq 0$, सिद्ध करें $\vec{b} = \vec{c}$.

व्याख्यासहित उत्तर

खण्ड – अ

OMR ANSWER-SHEET

1.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	51.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
2.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	52.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
3.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	53.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
4.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	54.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
5.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	55.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
6.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	56.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
7.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	57.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
8.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	58.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
9.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	59.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
10.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	60.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
11.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	61.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
12.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	62.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
13.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	63.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
14.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	64.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
15.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	65.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
16.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	66.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
17.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	67.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
18.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	68.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
19.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	69.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
20.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	70.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
21.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	71.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
22.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	72.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
23.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	73.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
24.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	74.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
25.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	75.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
26.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	76.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
27.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	77.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
28.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	78.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
29.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	79.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
30.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	80.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
31.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	81.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
32.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	82.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
33.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	83.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
34.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	84.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
35.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	85.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
36.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	86.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
37.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	87.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
38.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	88.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
39.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	89.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
40.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	90.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
41.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	91.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
42.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	92.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
43.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	93.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
44.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	94.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
45.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	95.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
46.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	96.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
47.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	97.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
48.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	98.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
49.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	99.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
50.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	100.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ

ANSWER

1. (A)	2. (B)	3. (C)	4. (A)	5. (A)
6. (A)	7. (C)	8. (B)	9. (B)	10. (C)
11. (A)	12. (D)	13. (A)	14. (B)	15. (B)
16. (B)	17. (D)	18. (C)	19. (B)	20. (B)
21. (C)	22. (B)	23. (D)	24. (A)	25. (A)
26. (A)	27. (B)	28. (B)	29. (A)	30. (D)
31. (A)	32. (D)	33. (C)	34. (A)	35. (B)
36. (D)	37. (A)	38. (D)	39. (B)	40. (D)
41. (D)	42. (B)	43. (C)	44. (D)	45. (B)
46. (B)	47. (C)	48. (B)	49. (A)	50. (D)
51. (D)	52. (C)	53. (A)	54. (D)	55. (B)
56. (A)	57. (A)	58. (D)	59. (D)	60. (B)
61. (A)	62. (B)	63. (B)	64. (B)	65. (C)
66. (B)	67. (B)	68. (C)	69. (C)	70. (C)
71. (A)	72. (D)	73. (C)	74. (A)	75. (B)
76. (A)	77. (B)	78. (B)	79. (A)	80. (D)
81. (A)	82. (B)	83. (A)	84. (A)	85. (A)
86. (B)	87. (A)	88. (C)	89. (B)	90. (A)
91. (B)	92. (D)	93. (B)	94. (B)	95. (A)
96. (B)	97. (C)	98. (A)	99. (B)	100. (B)

खण्ड – ब

1. $(\sin y)^x = (\cos x)^y$ $\quad [\because \log m^n = n \log m]$

$\Rightarrow x \log \sin y = y \log \cos x$

दोनों तरफ x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$x \frac{d}{dx} \log \sin y + \log \sin y \frac{d}{dx} x = y \frac{d}{dx} \log \cos x + \log \cos x \frac{dy}{dx} y$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sin y} \cos y \frac{dy}{dx} + \log \sin y = -y \frac{\sin x}{\cos x} + \log \cos x \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \log \sin y + y \tan x = \log \cos x \frac{dy}{dx} - x \cot y \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\log \sin y + y \tan x}{\log \cos x - x \cot y}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y \tan x + \log \sin y}{\log \cos x - x \cot y}; \text{ Ans.}$$

2. $$\int \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}).(\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2})} dx$$

(परिमेयीकरण करने पर)

$$= \int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}}{(x+1) - (x+2)} dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}}{x+1-x-2} dx$$

$$= -1 \int \sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}\, dx$$

$$= -1 \left[\frac{(x+1)^{3/2}}{3/2} - \frac{(x+2)^{3/2}}{3/2} \right] + c$$

$$= \frac{-2}{3} [(x+1)^{3/2} - (x+2)^{3/2}] + c \text{ ; Ans.}$$

3. $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^x . e^y \Rightarrow \int \frac{e}{e^y} dy = \int e^x dx$

$\Rightarrow \int e^{-y} dy = \int e^x dx$

$\Rightarrow -e^{-y} = e^x + C$

$\Rightarrow e^{-y} = -e^x + C$

$\Rightarrow -y = \int (-e^x + C)$

$\Rightarrow y = -\int (C - e^x) = \int \left(\frac{1}{C - e^x}\right)$, Ans.

4. $\cot^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$

माना $\cot^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \theta$

$\cot\theta = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\cot\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cot\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$\cot\theta = \cot\frac{2\pi}{3} \therefore \theta = \frac{2\pi}{3}$, Ans.

5. LHS $= 2\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{2\times\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\times\frac{9}{8}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}{1-\frac{3}{4}\times\frac{1}{7}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{25}{28}}{\frac{25}{28}}\right)$

$= \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$ RHS Proved.

6. LHS $= \begin{vmatrix} x+y & 2x & 2x \\ 2x & x+y & 2x \\ 2x & 2x & x+y \end{vmatrix}$

$C_1 \to C_1 + (C_2 + C_3)$ लागू करने पर,

$= \begin{vmatrix} 5x+y & 2x & 2x \\ 5x+y & x+y & 2x \\ 5x+y & 2x & x+y \end{vmatrix}$

$= (5x+y)\begin{vmatrix} 1 & 2x & 2x \\ 1 & x+y & 2x \\ 1 & 2x & x+y \end{vmatrix}$

$R_2 \to R_2 - R_1$ और $R_3 \to R_3 - R_2$ लागू करने पर,

$= (5x+y)\begin{vmatrix} 1 & 2x & 2x \\ 0 & (y-x) & 0 \\ 0 & (x-y) & -x+y \end{vmatrix}$

$= [(5x+y)(y-x)(y-x)]$

$= (5x+y)(y-x)^2$, proved.

7. $\begin{vmatrix} x & x \\ 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

$\Rightarrow x^2 - x = 6 - 4 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$\Rightarrow x(x-2) + 1(x-2) = 0$

$\Rightarrow (x-2)(x+1) = 0$

$\therefore x = 2, -1$, Ans.

8. $2A - B = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$, Ans.

9. माना कि $y = x^{\sin x}$

दोनों तरफ लघुगणक (logarithm) लेने पर,

$\log y = \log(x^{\sin x})$

$\Rightarrow \log y = \sin x . \log x$

दोनों तरफ x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \cos x . \log x + \sin x . \frac{1}{x}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\left[\cos x . \log x + \frac{\sin x}{x}\right]$

$= x^{\sin x} . \left[\cos x . \log x + \frac{\sin x}{x}\right]$, Ans.

10. माना कि $y = (\log x)^{\cos x}$

दोनों तरफ log लेने पर,

$\therefore \log y = \log(\log x)^{\cos x}$

$\Rightarrow \log y = \cos x . \log(\log x)$

दोनों तरफ x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\sin x . \log(\log x) + \cos x . \frac{1}{\log x}\cdot\frac{1}{x}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\left[\frac{\cos x}{x\log x} - \sin x \log(\log x)\right]$

$= (\log x)^{\cos x} . \left[\frac{\cos x}{x\log x} - \sin x . \log(\log x)\right]$, Ans.

11. माना कि $y = \tan^{-1}\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)$

$$= \tan^{-1}\left\{\frac{2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right\} = \tan^{-1}\left\{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right\}$$

$$= \tan^{-1}\left\{\tan\frac{x}{2}\right\} = \frac{x}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{dx} = \frac{1}{2}, \text{ Ans.}$$

12. $x = \cos\theta - \cos 2\theta$, $y = \sin\theta - \sin 2\theta$

$$\therefore \quad \frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta + 2\sin 2\theta = 2\sin 2\theta - \sin\theta$$

और $\dfrac{dy}{d\theta} = \cos\theta - 2\cos 2\theta$

और $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \dfrac{\cos\theta - 2\cos 2\theta}{2\sin 2\theta - \sin\theta}$, Ans.

13. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 100$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$

$= 3(x^2 - 2x + 1)$

$= 3(x-1)^2$

$x \in R, f'(x) = +\text{ve}$

$\therefore$ f वर्धमान फलन है।

14. माना $\log x = t$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}dx = dt$$

$$\therefore \quad I = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\log x)^2}{2} + C, \text{ Ans.}$$

15. $\int (1-x)\sqrt{x}dx = \int (1-x)\,x^{1/2}dx$

$$= \int x^{\frac{1}{2}}\,dx - \int x^{\frac{3}{2}}dx$$

$$= \frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^{5/2}}{5/2} + C$$

$$= \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{2}{5}x^{5/2} + C$$

$$= \frac{2}{15}x\sqrt{x}(5-3x) + C, \text{ Ans.}$$

16. $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \sqrt{1-\sin 2x}\,dx$

$$= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)^2\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \cos x\,dx - \int_0^{\pi/4} \sin x\,dx$$

$$= [\sin x]_0^{\pi/4} + [\cos x]_0^{\pi/4}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 0\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) = \sqrt{2} - 1, \text{ Ans.}$$

17. $I = \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}} = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}}\,dx$ ... (i)

और $I = \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} + \sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}}\,dx$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}\,dx \quad \text{... (ii)}$$

समी॰ (i) + (ii) करने पर,

$$2I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \left(\frac{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}}\right)dx$$

$$2I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} dx$$

$$\Rightarrow \quad 2I = [x]_{\pi/6}^{\pi/3}$$

$$\Rightarrow \quad 2I = \left[\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right] = \left[\frac{2\pi - \pi}{6}\right] = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \quad I = \frac{\pi}{12}; \text{ Ans.}$$

18. $\dfrac{dy}{dx} = 1 + x^2y^2 + x^2 + y^2$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = (1+x^2) + y^2(1+x^2)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = (1+y^2)(1+x^2)$$

$$\therefore \quad \int \frac{dy}{1+y^2} = \int (1+x^2)\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1}y = x + \frac{x^3}{3} + C, \text{ Ans.}$$

19. जब तीन सदिश एकतलीय होता।

$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = 0$

$$\vec{b}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & a & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}\,(6+a) - \vec{j}\times 3 + \vec{k}\,(2a+3)$$

$\vec{a}\ (\vec{b}\times\vec{c}) = 0$

$\Rightarrow\ (\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})\,.\,\{\vec{i}\ (6+a)-\vec{j}\ (3)+\vec{k}\ (2a+3)\} = 0$

$\Rightarrow\ (6+a)-3+2a+3 = 0$

$\Rightarrow\ 6+3a = 0$

$\therefore\ a = 2$, **Ans.**

20. दिया गया है: $\vec{a} = 2\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}$ और $\vec{b} = -7\hat{i}+6\hat{j}+8\hat{k}$

$$\therefore\ \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -3 & -5 \\ -7 & 6 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -7 & 8 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -7 & 6 \end{vmatrix}$$

$= \hat{i}\,(-24+30)-\hat{j}(16-35)+\hat{k}(12-21) = 6\hat{i}+19\hat{j}-9\hat{k}$

21. $P\,(E) = 0.6,\ P\,(F) = 0.3,\ P\,(E\cap F) = 0.2$

अब (i) $P\ (E/F) = \dfrac{P\,(E\cap F)}{P\,(F)} = \dfrac{0.2}{0.3} = \dfrac{2}{3}$

(ii) $P\ (F/E) = \dfrac{P\,(E\cap F)}{P\,(E)} = \dfrac{0.2}{0.6} = \dfrac{1}{3}$, **Ans.**

22. E = विभिन्न संख्या रखने वाली

F = योग 4 है। $\{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$

$P\,(E) = \dfrac{30}{36} = \dfrac{5}{6},\ P\,(F) = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$

$n\,(E\cap F) = 2;\ \{(1, 3), (3, 1)\}$

$\because\ P\,(E\cap F) = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$

$\therefore\ P\,(F/E) = \dfrac{1/18}{5/6} = \dfrac{1}{15}$, **Ans.**

23. माना कि लाल गेंद निकालने की घटना A है।

$P\,(A) = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2} = P$ (माना) $q = 1-\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore$ ठीक एक लाल गेंद निकालने की प्रायिकता

$${}^{n}C_{r}\ p^{r}q^{n-r} = {}^{3}C_{1}\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2}$$

$$= 3\times\frac{1}{8} = \frac{3}{8},\ \textbf{Ans.}$$

24. अगर अक्ष से कोई रेखा समान झुकाव पर है तो इसका d.c.s.

$$= \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left(\because\ l^2+m^2+n^2 = 1 \Rightarrow 3l^2 = 1\ \Rightarrow l = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$\Rightarrow$ d.r.s $= \pm1, \pm1, \pm1$

$(2, -1, 2)$ से गुजरने वाली अभीष्ट रेखा है

$$\frac{x-2}{\pm1} = \frac{y+1}{\pm1} = \frac{z-2}{\pm1}$$

यदि $(+, +, +)$ को लें

अभीष्ट रेखा है $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-2}{1}$, **Ans.**

25. समतल $2x-3y+6z+21 = 0$ से मूल बिन्दु $(0, 0, 0)$ के लम्ब की लम्बाई

$$= \frac{2\times0-3\times0+6\times0+21}{\sqrt{2^2+(-3)^2+6^2}} = \frac{21}{7} = 3\ ,\ \textbf{Ans.}$$

26. दिया गया फलन $f: R\to R,\ f(x) = x^2-3x+2$ द्वारा परिभाषित फलन है।

अतः $f\,(f\,(x)) = f\,(x^2-3x+2)$

$= (x^2-3x+2)^2 - 3\,(x^2-3x+2)+2$

$= x^4+9x^2+4-6x^3-12x+4x^2-3x^2+9x-6+2$

$= x^4-6x^3+10x^2-3$; **Ans.**

27. LHS $= \tan^{-1}\dfrac{2}{5}+\tan^{-1}\dfrac{1}{3}+\tan^{-1}\dfrac{1}{12}$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{2/5+\frac{1}{3}}{1-2/5\times1/3}\right)+\tan^{-1}\frac{1}{12}$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{11/15}{13/15}\right)+\tan^{-1}\frac{1}{12}$$

$$= \tan^{-1}\frac{11}{13}+\tan^{-1}\frac{1}{12}$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{11}{13}+\frac{1}{12}}{1-\frac{11}{13}\times\frac{1}{12}}\right)$$

$= \tan^{-1}(1)$

$= \tan^{-1}(\tan\pi/4)$

$= \pi/4 =$ **R.H.S. Proved**

28. यहाँ $\vec{a} = (2,3,-5) = (2\vec{i}+3\vec{j}-5\vec{k})$

और $\vec{b} = (2,2,2) = (2\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k})$

$\therefore\ |\vec{a}| = \sqrt{2^2+3^2+(-5)^2} = \sqrt{38}$

$|\vec{b}| = \sqrt{2^2+2^2+2^2} = \sqrt{12}$

तथा $\vec{a}\,.\,\vec{b} = (2\vec{i}+3\vec{j}-5\vec{k})\,.\,(2\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k})$

$= 2\times2+3\times2+(-5)\times2$

$= 4+6-10$

$= 10-10 = 0$

अतः $\vec{a}$ और $\vec{b}$ परस्पर लंब है और इनके बीच का कोण $90°$ है। **Ans.**

29. $x^2 + y^3 = 3$ (straight line)

$\Rightarrow \quad 2x + 2y.\frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \quad M = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; **Ans.**

30. $\begin{pmatrix} 2x-y & 5 \\ 3 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

दिए गए आव्यूह तभी बराबर होंगे जबकि दोनों के संगत अवयव समान हों,

अतः $y = -2$

और $2x - y = 6$

$\Rightarrow \quad 2x = 6 + y = 6 + (-2) = 4$

$\therefore \quad x = \frac{4}{2} = 2$; **Ans.**

31. $a_1 = 2, b_1 = -1, c = 1$

$a_2 = 1, b_2 = 1, c_2 = 2$

मान लिया दोनों तलों के बीच का कोण θ है।

$\therefore \quad \cos\theta = \frac{2.1 + (-1).1 + 1.2}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}}$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{2 - 1 + 2}{\sqrt{6}\sqrt{6}}$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\therefore \quad \theta = \frac{\pi}{6} = 30°$; **Ans.**

32. यहाँ $[x - 5 - 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$

$\Rightarrow [x - 0 - 2 \quad 0 - 10 - 0 \quad 2x - 5 - 3]\begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$

$\Rightarrow [x - 2, -10, \quad 2x - 8]\begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$

$\Rightarrow [x^2 - 2x + (-40) + 2x - 8] = 0$

$\Rightarrow [x^2 - 2x - 40 + 2x - 8] = 0$

$\Rightarrow x^2 - 48 = 0$

$\therefore \quad x = \pm 4\sqrt{3}$, **Ans.**

33. माना, $I = \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}$

माना, $\frac{x}{a} = t, \therefore dx = a\,dt$

$\therefore \quad I = \frac{1}{a^2} a \int \frac{dt}{1 + t^2}$

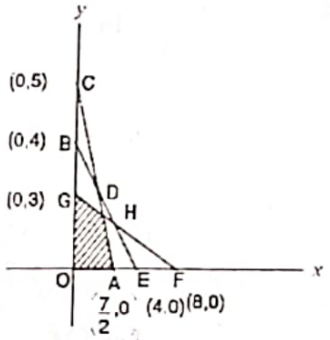
$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{a}\tan^{-1}(t) + C$

$\Rightarrow \quad = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$, **Proved.**

34. (a) $x + y \le 4 \Rightarrow x + y = 4 \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{x}{4} = 1$

(b) $3x + 8y \le 24 \Rightarrow 3x + 8y = 24 \Rightarrow \frac{x}{8} + \frac{y}{3} = 1$

(c) $10x + 7y \le 35 \Rightarrow 10x + 7y = 35 \Rightarrow \frac{x}{7/2} + \frac{y}{5} = 1$



OGHA का संभव क्षेत्र

$O = (0, 0), G = (0, 3), H = \left(\frac{112}{59}, \frac{135}{59}\right), A = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$

Now, $z = 5x + 79$; z at $O = O$

z at $G = 5 \times 0 + 7 \times 3 = 21$

z at $A = 5 \times \frac{7}{2} + 7 \times 0 = \frac{35}{2} = 17.5$

z at $H = 5 \times \frac{112}{59} + 7 \times \frac{135}{59} = \frac{560}{59} + \frac{945}{59} = \frac{1505}{59} = 25.5$

Minimum of $z = 17.5$

35. $\frac{dx}{dy} = \frac{\tan^{-1} y}{1 + y^2} - \frac{x}{1 + y^2} = \frac{dx}{dy} + \frac{x}{1 + y^2} = \frac{\tan^{-1} y}{1 + y^2}$

$= e^{\int p\,dy} = e^{\int \frac{1}{1+y^2} dy} = e^{\tan^{-1} y}$

$= \frac{dx}{dy} \times e^{\tan^{-1} y} + \frac{x}{1 + y^2} \times e^{\tan^{-1} y} = \frac{\tan^{-1} y}{1 + y^2} \times e^{\tan^{-1} y}$

$= \frac{d\,(x \times e^{\tan^{-1} y})}{dy} = \frac{\tan^{-1} y \times e^{\tan^{-1} y}}{1 + y^2}$

$= \int d\,(x \times e^{\tan^{-1} y}) = \frac{\tan^{-1} y \times e^{\tan^{-1} y}}{1 + y^2} dy$

$= x \times e^{\tan^{-1} y} = \int \frac{\tan^{-1} y \times e^{\tan^{-1} y}}{1 + y^2} dy$

$\frac{\tan^{-1} y = t}{1 + y^2} dy = dt = x \times e^{\tan^{-1} y} = \int t \times e^t + c$

$= x\tan^{-1} y = t \times e^t - \int 1 \times e^t dt + c = e^t(t - 1) + c$

Proved

36. माना, $I = \int_0^{\pi/4} \log(1+\tan x)\,dx$

फिर, $I = \int_0^{\pi/4} \log\left\{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right\}dx$

$$= \int_0^{\pi/4} \log\left\{1+\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan x}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan x}\right\}dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \log\left\{\frac{1+\tan x+1-\tan x}{1+\tan x}\right\}dx$$

जोड़ने पर,

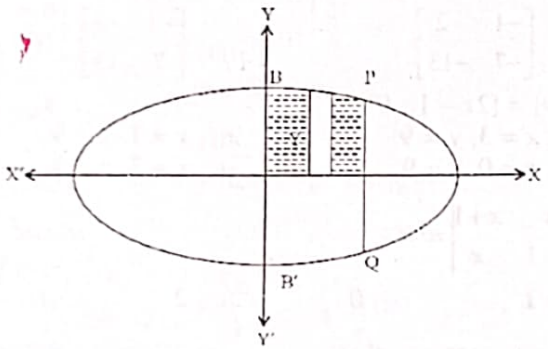
$$2I = \int_0^{\pi/4}\left[\log(1+\tan x)+\log\frac{2}{(1+\tan x)}\right]dx$$

$$= \int_0^{\pi/4}\left[\log\left\{(1+\tan x).\frac{2}{(1+\tan x}\right\}\right]$$

$$= \log 2\int_0^{\pi/4} dx = \frac{\pi}{4}\log 2$$

$\therefore \quad I = \frac{\pi}{8}\log 2$

37. दिए हुए दीर्घवृत्त एवं रेखाओं $x=0$ तथा $x=ae$ से घिरा हुआ क्षेत्र $BOB'QFPB$ है।



सूत्र से, क्षेत्र $BOB'QFPB$ का क्षेत्रफल $= 2\int_0^{ae} y\,dx$

$$= 2\int_0^{ae}\frac{b}{a}.\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{2b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^{ae}$$

$$= \frac{2b}{a}\left[\left(\frac{ae}{2}.\sqrt{a^2-a^2e^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{ae}{a}\right)-0\right]$$

$$= be.a\sqrt{1-e^2}+ab\sin^{-1}e$$

$$= ab\left[e\sqrt{1-e^2}+\sin^{-1}e\right], \text{ Ans.}$$

38. माना $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ का बीच का कोण α

एवं $\vec{a}$ तथा $\vec{c}$ का बीच का कोण β है।

$\therefore \quad \vec{a}.\vec{b} = \vec{a}.\vec{c}$

$$|\vec{a}|.|\vec{b}|\cos\alpha = |\vec{a}||\vec{c}|\cos\beta \qquad \text{... (i)}$$

पुनः $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{a}\times\vec{c}$

$$\Rightarrow |\vec{a}|.|\vec{b}|\sin\alpha = |\vec{a}||\vec{c}|\sin\beta \qquad \text{... (ii)}$$

समी॰ (i) में (ii) से भाग देने पर,

$$\frac{|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha}{|\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha} = \frac{|\vec{a}||\vec{b}|\cos\beta}{|\vec{a}||\vec{b}|\sin\beta}$$

$\Rightarrow \quad \cot\alpha = \cot\beta \quad \therefore \ \alpha = \beta$

अब समी॰ (i) से,

$$|\vec{a}|.|\vec{b}|\cos\alpha = |\vec{a}||\vec{c}|\cos\alpha$$

$\therefore \quad |\vec{b}| = |\vec{c}|$ अतः $b = c$, proved.

❑❑❑