MODEL PAPER – 5

समय : 3 घंटे 15 मिनट] [पूर्णांक : 100

परीक्षार्थी के लिए निर्देश :

1. परीक्षार्थी यथासंभव अपने शब्दों में ही उत्तर दें।
2. दाहिनी ओर हाशिये पर दिए हुए अंक पूर्णांक निर्दिष्ट करते है।
3. इस प्रश्न-पत्र को ध्यानपूर्वक पढ़ने के लिए 15 मिनट का अतिरिक्त समय दिया गया है।
4. यह प्रश्न-पत्र दो खण्डों में है—खण्ड-अ एवं खण्ड-ब।
5. खण्ड-अ में 100 वस्तुनिष्ठ प्रश्न है, इनमें से केवल 50 वस्तुनिष्ठ प्रश्न का उत्तर देना है। (प्रत्येक के लिए 1 अंक निर्धारित है), इनका उत्तर उपलब्ध कराये गये OMR Answer Sheet में दिए गए सही वृत्त को काले/नीले बॉल पेन से भरें। किसी भी प्रकार के व्हाइटनर/तरल पदार्थ/ब्लेड/चाकू आदि का उत्तर पत्रिका में प्रयोग करना मना है, अथवा परीक्षा परिणाम अमान्य होगा।
6. खण्ड-ब में 30 लघु उत्तरीय प्रश्न हैं। (प्रत्येक के लिए 2 अंक निर्धारित है), जिनमें से किसी 15 प्रश्नों का उत्तर देना अनिवार्य है। इनके अतिरिक्त इस खण्ड में 8 दीर्घ उत्तरीय प्रश्न दिए गए हैं। (प्रत्येक के लिए 5 अंक निर्धारित है।) जिनमें से किन्हीं 4 प्रश्नों का उत्तर देना है।
7. किसी प्रकार के इलेक्ट्रॉनिक उपकरण का प्रयोग पूर्णतया वर्जित है।

खण्ड – अ : वस्तुनिष्ठ प्रश्न

निर्देश : प्रश्न-संख्या 1 से 100 में से केवल 50 वस्तुनिष्ठ प्रश्नों का चयन करें। चुने गए प्रश्न के सही विकल्प को चिह्नित कर OMR Answer-Sheet में रंजित करें। $50 \times 1 = 50$

1. $\int \frac{\log x}{x} dx =$

(A) $\frac{1}{2}(\log x)^2 + c$ (B) $-\frac{1}{2}(\log x)^2 + c$

(C) $\frac{2}{x^2} + c$ (D) $-\frac{2}{x^2} + c$

2. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx =$

(A) $2\sin\sqrt{x} + c$ (B) $\sin\sqrt{x} + c$

(C) $\cos\sqrt{x} + c$ (D) $2\cos\sqrt{x} + c$

3. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + 2y = \sin x$ का समाकलन गुणक है :

(A) e^x (B) e^{3x}

(C) e^{2x} (D) e^{4x}

4. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} + \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) =$

(A) 1 (B) 0

(C) –1 (D) 3

5. $Z = 3x + 2y$ का अधिकतम मान जहाँ कि व्यवरोध $3x + y \le 15, x \ge 0, y \ge 0$ है :

(A) 30 (B) 15

(C) 10 (D) इनमे से कोई नही

6. $\frac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) =$

(A) 0 (B) $\frac{2\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) π

7. यदि $2A + B + X = 0$, जहाँ $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ तो $X =$

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -7 & -13 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 13 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -7 & -13 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 7 & 13 \end{bmatrix}$

8. $[x\ y] = [2x - 1 \quad 9] \Rightarrow$

(A) $x = 3, y = 9$ (B) $x = 1, y = 9$

(C) $x = 0, y = 9$ (D) $x = 3, y = 4$

9. $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ x-1 & x \end{vmatrix} =$

(A) 1 (B) 0 (C) 2 (D) –1

10. यदि $y = x^{20}$ तो $\frac{d^2y}{dx^2} =$

(A) x^{18} (B) $20x^{19}$

(C) $380x^{18}$ (D) x^{10}

11. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} =$

(A $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 25 & 35 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 4 & 15 \\ 10 & 35 \end{bmatrix}$ (C) [19 45] (D) $\begin{bmatrix} 19 \\ 45 \end{bmatrix}$

12. $[2a - 7\ 1] = [a \quad b - 1] \Rightarrow (a, b) =$

(A) (1, 7) (B) (2, 7) (C) (7, 2) (D) (2, 3)

13. $|3\vec{i} - 4\vec{j} - 5\vec{k}| =$

(A) $5\sqrt{2}$ (B) 12 (C) 2 (D) 9

14. $(10\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \times (-4\vec{i} + 7\vec{j} - 11\vec{k}) =$

(A) $-18\vec{i} - 106\vec{j} + 74\vec{k}$ (B) $18\vec{i} - 106\vec{j} - 74\vec{k}$

(C) $18\vec{i} + 106\vec{j} + 74\vec{k}$ (D) $5\vec{i} - 6\vec{j} - 7\vec{k}$

15. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} - y\sin x = \cot x$ का समाकलन गुणक है :

(A) $\sin x$ (B) $e^{-\sin x}$ (C) $e^{\sin x}$ (D) $e^{\cos x}$

16. $\int (\cos\theta \operatorname{cosec}^2\theta - \cos\theta \cot^2\theta)\, d\theta =$

(A) $\log \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta + k$ (B) $\operatorname{cosec}\theta \cot\theta + k$
(C) $k + \sin\theta$ (D) $\theta + k$

17. $\int (4\cos x - 5\sin x)\, dx =$

(A) $k + 4\sin x + 5\cos x$ (B) $k - 4\sin x - 5\cos x$
(C) $k + 4\sin x - 5\cos x$ (D) $k - 4\sin x + 5\cos x$

18. $x \in [-1\ 1], \sin[2(\sin^{-1}x + \cos^{-1}x)] =$

(A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) $\frac{1}{2}$

19. $x \in R, \operatorname{cosec}(\tan^{-1}x + \cot^{-1}x) =$

(A) 0 (B) 1 (C) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (D) 2

20. $3\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} =$

(A) $\begin{bmatrix} 21 & -6 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 24 & 0 \end{bmatrix}$
(C) $\begin{bmatrix} 21 & -6 \\ 24 & 0 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 21 & -2 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$

21. $\frac{d}{dx}(e^x + \cos 5x) =$

(A) $e^x + \cos 5x$ (B) $e^x + 5\sin 5x$
(C) $e^x - 5\sin 5x$ (D) $e^x - 5\cos 5x$

22. $(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) \cdot (7\vec{i} - 8\vec{j} + 9\vec{k}) =$

(A) 22 (B) 23 (C) 24 (D) 25

23. $\vec{k} \cdot (\vec{i} + \vec{j}) =$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) -1

24. $\tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{2}{9}\right)$ समान है :

(A) $\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ (B) $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$
(C) $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ (D) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

25. $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ का मुख्य मान है :

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{3\pi}{4}$ (C) $\frac{5\pi}{4}$ (D) कोई नहीं

26. $\begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$ का मान होगा :

(A) $\cos^2 x - \sin^2 x$ (B) 0
(C) 1 (D) -1

27. अवकल समीकरण $ydx - xdy = xydx$ का हल है :

(A) $\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} = xy + c$ (B) $x = kye^x$
(C) $x = kye^y$ (D) इनमें से कोई नहीं

28. $\hat{n}^2 =$

(A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) $\vec{n}$

29. ताश के 52 पत्तों में से यदि एक पत्ता खींचा जाए तो इसके इक्का होने की प्रायिकता है :

(A) $\frac{1}{26}$ (B) $\frac{1}{13}$ (C) $\frac{1}{52}$ (D) $\frac{1}{4}$

30. यदि $f: R \to R$ जहाँ $f(x) = 5x + 4$ हो, तो $f^{-1}(x)$ निम्न में से कौन होगा ?

(A) $\frac{x-5}{4}$ (B) $\frac{x-y}{5}$ (C) $\frac{x-4}{5}$ (D) $\frac{x}{4} - 5$

31. $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) =$

(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{2\pi}{3}$ (D) $\frac{3\pi}{4}$

32. $\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} =$ प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन :

(A) $2\sin^{-1}x$ (B) $\sin^{-1}2x$
(C) $\tan^{-1}2x$ (D) $2\tan^{-1}x$

33. अवकल समीकरण $\cos^2 x\frac{dy}{dx} + y = \tan x$ का समाकलन गुणक है :

(A) $e^{\tan x}$ (B) $e^{\cot x}$ (C) $e^{\sin x}$ (D) $e^{\cos x}$

34. $|\vec{j}| =$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

35. $\vec{j} \times \vec{j} = ?$

(A) $\vec{0}$ (B) 1 (C) $\vec{k}$ (D) $-\vec{k}$

36. $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) = \ldots.$

(A) $\frac{1}{1+x^2}$ (B) $\frac{1}{1-x^2}$
(C) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

37. यदि $y = \sin^2 x$, तो $\frac{dy}{dx}$

(A) $2\sin x$ (B) $\cos^2 x$
(C) $2\sin x \cos x$ (D) $\sin x \cdot \cos x$

38. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} =$

(A) $\sqrt{x} + k$ (B) $2\sqrt{x} + k$
(C) $x + k$ (D) $\frac{2}{3}x^{3/2} + k$

39. $\int \frac{dx}{1+\cos x} =$

(A) $\tan\frac{x}{2}+k$ (B) $\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}+k$

(C) $2\tan\frac{x}{2}+k$ (D) $\tan^2\frac{x}{2}+k$

40. x-अक्ष की दिक्कोज्याएँ होती हैं :

(A) (0, 0, 0) (B) (1, 0, 0)

(C) (0, 1, 0) (D) (0, 0, 1)

41. यदि $A=\begin{bmatrix}9 & 10 & 11\\12 & 13 & 14\end{bmatrix}$ और $B=\begin{bmatrix}11 & 10 & 9\\8 & 7 & 6\end{bmatrix}$ तो A + B=.....

(A) $\begin{bmatrix}20 & 20 & 20\\20 & 20 & 20\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}10 & 10 & 10\\10 & 10 & 10\end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix}10 & 5 & 10\\5 & 10 & 10\end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix}25 & 10 & 15\\15 & 10 & 25\end{bmatrix}$

42. $1 - P(A' \cap B') =$

(A) $P(A \cap B)$ (B) $P(A \cup B)$

(C) $P(A)$ (D) $P(B)$

43. यदि A और B दो घटनाएँ हो, तो $P\left(\frac{A}{B}\right)+P\left(\frac{A'}{B}\right)=$

(A) 0 (B) 1

(C) −1 (D) इनमें से कोई नहीं

44. $\int \sin x\,dx =$

(A) $-\cos x + K$ (B) $\sin x + K$

(C) $-\sin x + K$ (D) $\tan x + K$

45. $\begin{vmatrix}1 & a & b+c\\1 & b & c+a\\1 & c & a+b\end{vmatrix}$ =.....

(A) 1 (B) −1 (C) 0 (D) $(a + b + c)$

46. $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 4 & 6\\1 & 1 & 2\end{vmatrix}$ = ...

(A) 5 (B) 17 (C) 8 (D) 0

47. $\frac{d}{dx}(\log\sqrt{x}) =$

(A) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{x}}$ (C) $\frac{1}{2x}$ (D) $\frac{\sqrt{x}}{2}$

48. यदि $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ और $f = \{(a, 1), (b, 2), (c, 2)\}$ तो f कैसा फलन है :

(A) एकैक अंतःक्षेपी (B) अनेकैक अंतःक्षेपी

(C) अनेकैक आच्छादक (D) एकैक आच्छादक

49 $\sin^{-1}\frac{1}{2} =$

(A) π (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

50. $\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x+\cot^{-1}x) =$

(A) $\frac{2}{1+x^2}$ (B) 0 (C) 1 (D) 2

51. $\frac{d}{dx}\left[\lim_{x\to1}\frac{x^n-1}{x-1}\right] =$

(A) n (B) nx^{n-1} (C) 1 (D) 0

52. बिन्दु (x, y, z) का स्थिति सदिश है :

(A) $x\vec{i}+y\vec{j}-z\vec{k}$ (B) $x\vec{i}+y\vec{j}-z\vec{k}$

(C) $x\vec{i}+y\vec{j}-z\vec{k}$ (D) $x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

53. $\left|-\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}\right| =$

(A) $\sqrt{15}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) 2 (D) $\sqrt{14}$

54. $(1 + x^2)\,dy = (1 + y^2)\,dx$ का हल है :

(A) $x + y = k(1 - xy)$ (B) $y - x = k(1 - xy)$

(C) $x + y = k(1 + xy)$ (D) $y - x = k(1 + xy)$

55. $Z = 3x + 4y$ का अधिकतम मान
जहाँ कि व्यवरोध $x + y \le 4$
$x \ge 0, y \ge 0$ है

(A) 0 (B) 12

(C) 16 (D) इनमें से कोई नहीं

56. $\int x^n dx, n \neq 0 =$

(A) $\frac{x^{n-1}}{n-1}+C$ (B) $\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$

(C) $x^{n+1}+C$ (D) $x^{n-1}+C$

57. $\int \sec x\,dx =$

(A) $\log \sec x$ (B) $\log[\sec x + \tan x]$

(C) $\log(\sec x - \tan x)$ (D) $\sec x \cdot \tan x$

58. $P(A \cup B) =$

(A) $P(A) + P(B) + P(A \cap B)$ (B) $P(A) - P(B) - P(A \cap B)$

(C) $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (D) $P(A) - P(B) + (A \cap B)$

59. यदि $P(A) = \frac{3}{8}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, तो $P(A/B) =$

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{3}{8}$

60. यदि A तथा B समान कोटि के सममित आव्यूह है तो $AB - BA$ एक :

(A) विषम सममित आव्यूह (B) सममित आव्यूह

(C) शून्य आव्यूह (D) तत्समक आव्यूह

61. यदि $x\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k}$ एवं $-x\vec{i}+x\vec{j}+2\vec{k}$ परस्पर लंब हो तो $x =$

(A) −2, 5 (B) 2, 5 (C) −2, −5 (D) 2, −5

62. $\vec{i}\times(\vec{i}\times\vec{j})+\vec{j}\times(\vec{j}\times\vec{k})+\vec{k}\times(\vec{k}\times\vec{i}) =$

(A) $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ (B) 0

(C) 1 (D) $-(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$

63. तल $7x + 4y - 2z + 5 = 0$ पर अभिलंब के दिक्अनुपात है :

(A) 7, 4, −2 (B) 7, 4, 5 (C) 7, 4, 2 (D) 4, −2, 5

64. $\tan^{-1}\sqrt{3}-\cot^{-1}(-\sqrt{3}) =$

(A) π (B) 0 (C) $2\sqrt{3}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

65. $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ का मुख्य मान है :

(A) $\frac{2\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{3}$

66. $\frac{d}{dx}(2e^{2x}) =$

(A) $2e^{2x}$ (B) e^{2x} (C) $4e^{2x}$ (D) $2e^{x}$

67. $\frac{d}{dx}\cdot(\log x^n) =$

(A) $\frac{1}{x^n}$ (B) n (C) $\frac{1}{x}$ (D) $\frac{n}{x}$

68. $\int e^{\log x}dx =$

(A) $\log x + k$ (B) $xe^{\log x} + k$

(C) $\frac{x^2}{2} + k$ (D) $\frac{\log x}{x} + k$

69. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}dx = ?$

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $-\frac{\pi}{4}$ (D) $-\frac{\pi}{2}$

70. $7\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ का मापांक है :

(A) $\sqrt{10}$ (B) $\sqrt{55}$ (C) $3\sqrt{6}$ (D) 6

71. रेखाएँ $\frac{x-1}{l} = \frac{y+2}{m} = \frac{z-4}{n}$ और $\frac{x+3}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z}{6}$ एक-दूसरे के समांतर होंगी यदि :

(A) $2l = 3m = n$ (B) $3l = 2m = n$

(C) $2l + 3m + 6n = 0$ (D) $lmn = 36$

72. यदि $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \ \forall \ x_1 . x_2 \in$ तो $A \to B$ कैसा फलन होगा ?

(A) एकैक (one-one) (B) अचर (constant)

(C) आच्छादक (onto) (D) अनेकैक (many-one)

73. यदि $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$ तो $\Delta =$

(A) abc (B) 0

(C) a+b+c (D) इनमें से कोई नहीं

74. यदि ω समीकरण $x^3 - 1 = 0$ का एक अवास्तविक मूल हो, तो

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix} =$$

(A) 0 (B) 1 (C) ω (D) ω^2

75. यदि $y = \log \cos x^2$, तो $x = \sqrt{\pi}$ पर $\frac{dy}{dx}$ का मान है :

(A) 1 (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) 0 (D) $\sqrt{\pi}$

76. $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) =$

(A) $\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$ (B) $\sqrt{1-x^2}$

(C) $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

77. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = ?$

(A) $\frac{\pi}{12}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{2\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{3}$

78. $\int_4^9 \sqrt{x}\,dx = ?$

(A) $\frac{38}{3}$ (B) $\frac{35}{3}$ (C) $\frac{36}{7}$ (D) $\frac{45}{3}$

79. समीकरण $\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + 3y\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$ का घात है :

(A) 4 (B) 1

(C) 2 (D) 3

80. z-अक्ष की दिक् कोज्याएँ होती हैं :

(A) (0, 0, 0) (B) (1, 0, 0) (C) (0, 0, 1) (D) (0, 1, 0)

81. $\frac{d}{dx}(\cot x) =$

(A) $\tan x$ (B) $\text{cosec}^2 x$

(C) $-\text{cosec}^2 x$ (D) $\text{cosec } x \cot x$

82. $\frac{d}{dx}(e^{3x}) =$

(A) e^{3x} (B) $\frac{e^{3x}}{3}$ (C) $3e^{3x}$ (D) $3e^{x}$

83. यदि $f(-x) = -f(x)$ तब $\int_{-a}^{a} f(x)dx =$

(A) $2\int_0^a f(x)dx$ (B) 0

(C) 1 (D) -1

84. $\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx + \int_\beta^\alpha \varphi(x)dx =$

(A) 1 (B) $2\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx$

(C) $-2\int_\beta^\alpha \varphi(x)dx$ (D) 0

85. यदि 7 और 2, समीकरण $\begin{vmatrix} x & 3 & 7 \\ 2 & x & 2 \\ 7 & 6 & x \end{vmatrix} = 0$ के दो मूल हो, तो तीसरा मूल होगा :

(A) -9 (B) 14

(C) $\frac{1}{2}$ (D) कोई नहीं (None)

86. $\vec{i}\cdot(\vec{j}\times\vec{k})+\vec{j}\cdot(\vec{i}\times\vec{k})+\vec{k}\cdot(\vec{i}\times\vec{j})=$

(A) 0 (B) 1 (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) 3 **Ans. (B)**

87. दो सदिश $2\vec{i}+5\vec{j}+\vec{k}$ और $3\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$ हैं :

(A) समांतर (B) लम्ब
(C) बराबर (D) इनमें कोई नहीं

88. बिन्दु (4, 5, 6) का स्थिति सदिश है :

(A) $4\vec{i}+5\vec{j}+6\vec{k}$ (B) $4\vec{i}-5\vec{j}-6\vec{k}$
(C) $2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ (D) $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

89. $|2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}|=$

(A) 14 (B) $\sqrt{14}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 2

90. मूल बिन्दु से बिन्दु (–3, 4, 5) की दूरी है :

(A) 50 (B) $5\sqrt{2}$ (C) 6 (D) None

91. एक जोड़ा पासा को फेंका जाता है। दोनों पर समरूढ़ संख्या पाने की प्रायिकता है :

(A) $\frac{1}{36}$ (B) $\frac{1}{12}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) 0

92. $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x$ का मान है :

(A) π (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $-\frac{\pi}{2}$ (D) 1

93. $\tan^{-1}x+\cot^{-1}x$ का मान है :

(A) $-\pi$ (B) $-\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

94. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ तो सह-खंडन A =

(A) $\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & -1\end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$

95. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ हो, तो AB =

(A) $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ (D) 10

96. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}|\cos x|dx=$

(A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) 4

97. $\int_1^3 dx=$

(A) 4 (B) 2 (C) 3 (D) $\frac{1}{2}$

98. $\bar{k}.\bar{k}=$

(A) 0 (B) 1 (C) $\bar{i}$ (D) $\bar{j}$

99. यदि $\bar{a}=2\bar{i}-5\bar{j}+\bar{k}$ और $\bar{b}=4\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k}$ तो $\bar{a}.\bar{b}$ =

(A) 0 (B) –1 (C) 1 (D) 2

100. समुच्चय $\{a, b\}$ में द्विआधारी संक्रियाओं की संख्या है :

(A) 8 (B) 10 (C) 16 (D) 20

खण्ड – ब : गैर-वस्तुनिष्ठ प्रश्न

लघु उत्तरीय प्रश्न

निर्देश : प्रश्न-संख्या 1 से 30 तक लघु उत्तरीय प्रश्न है। इनमें से केवल 15 प्रश्नों का उत्तर दें। $15\times 2=30$

1. $\int \cos^3 x.\sin x\,dx$ का समाकलन करें।
2. उस तल का समीकरण ज्ञात करें जिसके x, y और z अक्षों पर अंत:खण्ड क्रमश: 2, 3 और –4 हैं।
3. दो पासों को बारह बार फेंका गया। सफलता के प्रायिकता बंटन का माध्य निकालें, यदि 4 से ज़्यादा योग प्राप्त करना सफलता हो।
4. x अक्ष से एक रेखा (plane) समतल $2x+y-z=5$ से होकर गुजरती है तो x का मान बताइए।
5. एक रेखा का समीकरण $\frac{4-x}{2}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+2}{1}$ है। इस रेखा के समान्तर रेखा का दिक्-कोसाइन बताइए।
6. सदिश $3\vec{i}-4\vec{j}+12\vec{k}$ की दिक्-कोज्याएँ निकालें।
7. $P(A\cup B)$ ज्ञात कीजिए यदि $2P(A)=P(B)=\frac{5}{13}$ और $P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{2}{5}$.
8. सिद्ध करें कि $\sin^{-1}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+a}}=\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}$
9. x अक्ष और वक्र $y=\sin x$ के बीच $x=0$ से $x=\pi$ तक के क्षेत्र का क्षेत्रफल निकालें।
10. हल करें : $\frac{dy}{dx}+1=e^{x+y}$
11. यदि $f: R\to R$, फलन $f(x)=\frac{3x+5}{2}$ द्वारा प्रदत्त फलन व्युत्क्रमणीय हो, तो f^{-1} बतायें।
12. $\sin^{-1}(x)+\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$ तो x का मान बतावें।
13. सिद्ध करें कि $4(\cot^{-1}(3)+\operatorname{cosec}^{-1}\sqrt{5})=\pi$
14. सिद्ध करें कि $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}$
15. यदि $\begin{vmatrix}x+1 & x-1\\ x-3 & x+2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}$ तब x का मान बताइए।
16. यदि $A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ तो प्रमाणित करें कि $A^2=I$.
17. यदि $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$, तो सिद्ध करें कि $A^3-4A^2+A=0$
18. $\frac{dy}{dx}$ निकालें : यदि $y^x=x^y$
19. $\frac{dy}{dx}$ निकालें : यदि $y=\cos^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

20. $\frac{dy}{dx}$ निकाले : यदि $y = \sin^{-1}x + \sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$

21. $\frac{dy}{dx}$ निकाले : यदि $y = \tan^{-1}(\log x)$

22. $\frac{dy}{dx}$ निकालें : यदि $y = \sin\sqrt{1+x^2}$

23. वक्र $x^2 + 3y - 3 = 0$ के स्पर्श रेखा का समीकरण निकालें जो रेखा $y = 4x - 5$ के समानान्तर है।

24. ऐसी दो संख्याएँ ज्ञात करे जिसका योग 24 है और जिसका गुणनफल उच्चतम है।

25. $\int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\,dx$ का मान बताएँ।

26. $\int \sin^3 x dx$ को समाकलित करें।

27. ज्ञात करें : $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}\,dx$

28. $e^{\frac{dy}{dx}} = x^2$ का व्यापक हल लिखें।

29. दो सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के बीच का कोण बताएँ जिसका परिणाम क्रमशः $\sqrt{3}$ और 2 है और $\vec{a}.\vec{b} = \sqrt{6}$.

30. $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ तथा $\vec{c} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ तो $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ ज्ञात करें।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

निर्देश : प्रश्न-संख्या 31 से 38 तक दीर्घ उत्तरीय प्रश्न है। किन्हीं 4 प्रश्नों का उत्तर दें। $4 \times 5 = 20$

31. दिखाएँ कि रेखाएँ $\frac{x-5}{7} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z}{1}$ और $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ परस्पर लम्ब है।

32. x तथा y ज्ञात करें।

$$x + y = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \text{ तथा } x - y = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

33. ज्ञात करें : $\int_0^{2\pi} \cos^5 x dx$

34. न्यूनतमीकरण करें : $Z = -3x + 3y$
जबकि $x + 2y \leq 8$
$3x + 2y \leq 12$
$x \geq 0, y \geq 0$

35. यदि $y = \tan^{-1}x$, तो प्रथम सिद्धान्त के नियम से $\frac{dy}{dx}$ निकालें।

36. समाकलन करें : $\int e^x \cos x\,dx$

37. वक्र $y^2 = x$, रेखाओं $x = 1, x = 4$ एवं x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

38. λ का मान बताइए जब $\vec{a} = \lambda\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$ का $\vec{b} = 2\hat{i} + 6\hat{j} + 3\hat{k}$ पर प्रक्षेप 4 इकाई है।

व्याख्यासहित उत्तर

खण्ड – अ

OMR ANSWER-SHEET

1.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	51.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	2.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	52.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
3.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	53.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	4.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	54.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
5.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	55.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	6.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	56.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
7.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	57.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	8.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	58.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
9.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	59.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	10.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	60.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
11.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	61.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	12.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	62.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
13.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	63.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	14.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	64.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
15.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	65.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	16.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	66.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
17.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	67.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	18.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	68.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
19.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	69.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	20.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	70.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
21.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	71.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	22.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	72.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
23.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	73.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	24.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	74.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
25.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	75.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	26.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	76.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
27.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	77.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	28.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	78.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
29.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	79.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	30.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	80.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
31.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	81.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	32.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	82.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
33.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	83.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	34.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	84.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
35.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	85.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	36.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	86.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
37.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	87.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	38.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	88.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
39.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	89.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	40.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	90.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
41.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	91.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	42.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	92.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
43.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	93.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	44.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	94.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
45.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	95.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	46.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	96.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
47.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	97.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	48.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	98.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
49.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	99.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	50.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	100.	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ

ANSWER

1. (A)	2. (A)	3. (C)	4. (B)	5. (A)
6. (C)	7. (C)	8. (B)	9. (A)	10. (C)
11. (D)	12. (C)	13. (A)	14. (A)	15. (D)
16. (C)	17. (A)	18. (A)	19. (B)	20. (C)
21. (C)	22. (C)	23. (A)	24. (D)	25. (A)
26. (C)	27. (B)	28. (B)	28. (B)	30. (C)
31. (C)	32. (D)	33. (A)	34. (B)	35. (A)
36. (C)	37. (C)	38. (B)	39. (A)	40. (B)
41. (A)	42. (B)	43. (B)	44. (A)	45. (C)
46. (D)	47. (C)	48. (B)	49. (B)	50. (B)
51. (D)	52. (D)	53. (D)	54. (D)	55. (C)
56. (B)	57. (B)	58. (C)	59. (B)	60. (A)
61. (D)	62. (D)	63. (A)	64. (D)	65. (D)
66. (C)	67. (D)	68. (C)	69. (A)	70. (C)
71. (B)	72. (A)	73. (B)	74. (A)	75. (C)
76. (C)	77. (A)	78. (A)	79. (B)	80. (C)
81. (C)	82. (C)	83. (B)	84. (D)	85. (A)
86. (B)	87. (B)	88. (A)	89. (B)	90. (B)
91. (A)	92. (B)	93. (C)	94. (A)	95. (C)
96. (A)	97. (B)	98. (B)	99. (B)	100. (C)

खण्ड – ब

1. $\cos x = t$ रखने पर, $\sin dx = -dt$

$$\therefore \int \cos^3 x \sin x\, dx = -\int t^3 dt$$

$$= -\frac{t^4}{4} + C$$

$$= -\frac{1}{4}\cos^4 x + C \text{, Ans.}$$

2. अंत:खण्ड के रूप में समतल का समीकरण

$$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}+\frac{z}{c}=1 \quad [\text{यहाँ } a=2, b=3, c=-4]$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{-4}=1$$

$$\Rightarrow \frac{6x+4y+(-3z)}{12}=1$$

$$\Rightarrow 6x + 4y - 3z = 1 \times 12$$

$$\therefore 6x + 4y - 3z = 12; \text{ Ans.}$$

3. मान 'p' सफलता की प्रायिकता तथा q असफलता की प्रायिकता है।

$\therefore$ असफल घटना

$= [(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1)]$

$$\therefore q = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \text{ तथा } p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

बरनौली प्रमेय से, $P(x = r) = {}^{12}C_r \left(\frac{5}{6}\right)^r \left(\frac{1}{6}\right)^r$

अतः माध्य $= np = 12 \times \frac{5}{6} = 10$

प्रसरण $= npq = 12 \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$

4. x अक्ष से गुजरती है। $y = 0, z = 0$

$$\therefore \quad 2x + 0 - 0 = 5, \quad x = \frac{5}{2}, \text{ Ans.}$$

5. दी गई रेखा, $\frac{4-x}{2} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{1}$

$$\Rightarrow \frac{x-4}{-2} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{1} \qquad \text{समी॰ (i)}$$

अब समी॰ (i) पर समान्तर रेखा का दिक्-कोसाइन

$$\frac{-2}{\sqrt{(-2)^2+2^2+1}}, \frac{2}{\sqrt{(-2)^2+2^2+1}}, \frac{1}{\sqrt{(-2)^2+2^2+1}}$$

$$= \frac{-2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \text{ Ans.}$$

6. सदिश $3\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}$ की दिक्-कोज्याएँ 3, –4, 12 है।

और $\sqrt{3^2 + (-4)^2 + (12)^2}$

$= \sqrt{9+16+144} = \sqrt{169} = 13$

अतः सदिश का दिक् कोज्याएँ $= \frac{3}{13}, -\frac{4}{13}, \frac{12}{13}$; Ans.

7. सूत्र से, $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$$\Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{P(A \cap B}{5/13}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5} \times \frac{5}{13} = P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{13}$$

अब प्रायिकता के योग प्रमेय से,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + 2P(A) - P(A \cap B) = 3P(A) - P(A \cap B)$$

$$= 3 \times \frac{5}{26} - \frac{2}{13} = \frac{15 \cdot\cdot 4}{26} = \frac{11}{26}; \text{ Ans.}$$

8. मान लें कि $\sin^{-1}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+a}} = \theta$; तो $\sin\theta = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sqrt{(x+a)^2 - (\sqrt{x})^2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+a-x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}} = \sqrt{x/a}$$

$$\therefore \quad \theta = \tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}} \text{ या } \sin^{-1}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+a}} = \tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}; \text{ Ans.}$$

9. $y = \sin x$

$$\text{Area} = \int_0^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi}$$

$$= -[\cos\pi - \cos 0°]$$

$$= -[-1 - 1]$$

$$= 2 \text{ Ans.}$$

10. यहाँ $\frac{dy}{dx}+1=e^{x+y}$ ... (i)

$x+y=v$ रखा

x के सापेक्ष अवकल करने पर, हम पाते हैं कि

$$1+\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$$

समीकरण (i) में मान रखने पर,

$$\frac{dv}{dx}=e^{v};\ \text{या}\ dx=e^{-v}\,dv$$

समीकरण करने पर, हम पाते हैं कि $\int dx=\int e^{-v}\,dv$

या $x=-e^{-v}+c$; या $x+e^{-(x+y)}=c$, जहाँ c समाकलन-अचर है।

11. $f(x_1)=\frac{3x_1+5}{2}$

$f(x_2)=\frac{3x_2+5}{2}$

$\because\ f(x_1)=f(x_2)$

अतः $x_1=x_2$

माना $f(x)=y \quad \therefore\ y=\frac{3x+5}{2}$

चूँकि $f(x)$ व्युत्क्रमणीय है।

$\therefore\ x=f^{-1}(y)$

$\therefore\ 3x+5=2y$

$\Rightarrow\ 3x=2y-5 \ \Rightarrow\ x=\frac{2y-5}{3}$

$\therefore\ f^{-1}(y)=\frac{2y-5}{3}$

अतः $f^{-1}(x)=\frac{2x-5}{3}$, **Ans.**

12. $\sin^{-1}(x)+\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow\ \sin^{-1}(x)=\frac{\pi}{2}-\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow\ \sin^{-1}x=\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

$\therefore\ x=\frac{1}{2}$, **Ans.**

13. माना $\cot^{-1}(3)=\alpha$, $\text{cosec}^{-1}(\sqrt{5})=\beta$

$\Rightarrow\ \cot\alpha=3$ और $\text{cosec}\beta=\sqrt{5}$

$\Rightarrow\ \tan\alpha=\frac{1}{3}$ और $\tan\beta=\frac{1}{\cot\beta}=\frac{1}{\sqrt{\text{cosec}^2\beta-1}}$

$=\frac{1}{\sqrt{5-1}}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow\ \tan\alpha=\frac{1}{3}$ और $\tan\beta=\frac{1}{2}$

$\therefore\ \alpha=\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ और $\beta=\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

अब बायाँ पक्ष :

$=4[\cot^{-1}(3)+\text{cosec}^{-1}(\sqrt{5})]=4[\alpha+\beta]$

$=4\left[\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]$

$=4\left[\tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}\right)\right]$

$=4\left[\tan^{-1}(1)\right]=4\frac{\pi}{4}=\pi=$ दायाँ पक्ष, **Proved.**

14. माना $\sin^{-1}x=\theta$ तब $\sin\theta=x$

लेकिन $\sin\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$\therefore\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=x$ या $\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\theta$

या $\theta+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ \sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}$, **Proved.**

15. $\begin{vmatrix} x+1 & x-1 \\ x-3 & x+2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

$\Rightarrow\ (x+1)(x+2)-(x-3)(x-1)=4\times3-(-1)\times1$

$\Rightarrow\ (x^2+3x+2)-(x^2-4x+3)=12+1$

$\Rightarrow\ 3x+2+4x-3=13$

$\Rightarrow\ 7x=14 \ \therefore\ x=2$

16. $A^2=AA=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}0+0+1&0+0+0&0+0+0\\0+0+0&0+1+0&0+0+0\\0+0+0&0+0+0&1+0+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$\therefore\ A^2=I$, **proved.**

17. $A=\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\ A^2=\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&12\\4&7\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\ A^3=\begin{bmatrix}7&12\\4&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}26&45\\15&26\end{bmatrix}$

$\therefore\ A^3-4A^2+A$

$=\begin{bmatrix}26&45\\15&26\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}7&12\\4&7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}26-28+2&45-48+3\\15-16+1&26-28+2\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=0$, **proved.**

18. $y^x=x^y$

दोनों तरफ log लेने पर,

$\log y^x=\log x^y$

$\Rightarrow\ x\log y=y\log x$

diff. w.r. to x

$1\cdot\log y+x\cdot\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dx}\log x+y\cdot\frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{x}{y}-\log x\right)\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-\log y$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{y\,(y-x\,.\log y)}{x\,(x-y\log x)}\,,\ \textbf{Ans.}$$

19. माना $x=\tan\theta \quad \therefore\ \theta=\tan^{-1}x$ ... (i)

$$\therefore \quad y=\cos^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right)$$

$$=\cos^{-1}\{\cos(\pi/2-2\theta\}$$

$$=\frac{\pi}{2}-2\theta=\frac{\pi}{2}-2\tan^{-1}x \text{ [समी॰ (i) से]}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\frac{\pi}{2}-2\tan^{-1}x\right]=0-2\times\frac{1}{1+x^2}$$

$$=\frac{-2}{1+x^2}\,,\ \textbf{Ans.}$$

20. $\because\ y=\sin^{-1}x+\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$

diff w.r. to x

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}}\times\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\times(-2x)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2}}\times\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0\,,\ \textbf{Ans.}$$

21. $y=\tan^{-1}(\log x)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\{\tan^{-1}(\log x)\}}{d(\log x)}\cdot\frac{d\log x}{dx}$$

$$=\frac{1}{1+(\log x)^2}\frac{1}{x}=\frac{1}{x\{(1+(\log x)^2\}}\,,\ \textbf{Ans.}$$

22. $y=\sin\sqrt{1+x^2}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\sin\sqrt{1+x^2}}{d\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{d\sqrt{1+x^2}}{d(1+x^2)}\cdot\frac{d(1+x^2)}{dx}$$

$$=\cos\sqrt{1+x^2}\,.\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}.2x$$

$$=\frac{x.\cos\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\,,\ \textbf{Ans.}$$

23. दिए गए वक्र का समीकरण है, $x^2+3y-3=0$

$$\Rightarrow \quad y=\frac{1}{3}(3-x^2) \qquad \text{... (i)}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}(-2x)$$

रेखा $y=4x-5$ की ढाल $=4$

प्रश्न से, $\frac{1}{3}(-2x)=4 \quad \Rightarrow \quad x=-6$

समी॰ (i) से, $y=\frac{1}{3}(3-36)=-11$

इस प्रकार बिन्दु $(-6,-11)$ मिला।

बिन्दु $(-6,-11)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण (इसका ढाल 4 है) होगा, $y+11=4(x+6)$ या, $y=4x+13$, **Ans.**

24. माना कि दो संख्याएँ x और $24-x$ तथा इनका गुणनफल y है।

$$\therefore \quad y=x\times(24-x)=24x-x^2 \qquad \text{समी॰ (i)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=24-2x \qquad \text{समी॰ (ii)}$$

उच्चतम व निम्नतम के लिए,

$$\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Rightarrow \quad 24-2x=0$$

$$\Rightarrow \quad x=12$$

अब समी॰ (ii) से, $\frac{d^2y}{dx^2}=-2<0$

$\therefore$ $x=12$ पर y का मान उच्चतम है।

अतः दो संख्याएँ 12 और $24-12=12$ है।

25. माना $I=\int\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx$

$$=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)dx$$

$$=\int(\sec^2 x-\sec x.\tan x)\,dx$$

$$=\tan x-\sec x+C,\ \textbf{Ans.}$$

26. यहाँ $I=\int\sin^3 x\,dx$

$$=\int\frac{3\sin x-\sin 3x}{4}dx$$

$$=\frac{1}{4}\left[-3\cos x-\frac{-\cos 3x}{3}\right]+C$$

$$=-\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{12}\cos 3x+C,\ \textbf{Ans.}$$

27. माना कि $z=1+\sin x$, तो $dz=\cos x\,dx$

जब $x=0,\ z=1+\sin 0=1+0=1$

तथा जब $x=\frac{\pi}{2}, z=1+\sin\frac{\pi}{2}=1+1=2$

$$\text{अब } I=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}dx=\int_1^2\frac{dz}{z^2}=\int_1^2 z^{-2}dz$$

$$=\left[\frac{z^{-1}}{-1}\right]_1^2=-\left[\frac{1}{z}\right]_1^2=-\left[\frac{1}{2}-1\right]=\frac{1}{2}\,,\ \textbf{Ans.}$$

28. $e^{\frac{dy}{dx}}=x^2$

दोनों तरफ log लेने पर,

$$\log_e e^{dy/dx}=\log_e x^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=2\log_e x$$

$$\Rightarrow \quad \int dy=2\int\log_e x\,dx$$

$$\therefore \quad y=2\left[\log_e x\int dx-\int\int dx\,.\frac{d\log x}{dx}.dx\right]$$

$$\Rightarrow \quad y = 2\left[x\log_e x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx\right]$$

$$\Rightarrow \quad y = 2\left[x\log_e x - x\right] + C, \text{ Ans.}$$

29. $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण है :

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}.2} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{18}}{3\times 2} = \frac{3\sqrt{2}}{3\times 2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \therefore \ \theta = \frac{\pi}{4}, \text{ Ans.}$$

30.
$$\vec{b}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\,(-2+3) + (-\vec{j})\,(-4+1) + \vec{k}\,(6-1)$$

$$= \vec{i} + 3\vec{j}) - 5\vec{k}$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\,(-10+9) + (-\vec{j})\,(5+3) + \vec{k}(3+2)$$

$$= -\vec{i} - 8\vec{j} + 5\vec{k}$$

31. पहली रेखा $\frac{x-5}{7} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z}{1}$ के दिक् अनुपात

$= 7, -5, 1$

तथा दूसरी रेखा $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ के दिक् अनुपात $= 1, 2, 3$

यहाँ $a_1 = 7, b_1 = -5, c_1 = 1$ तथा $a_2 = 1, b_2 = 2, c_2 = 3$

दी हुई रेखायें परस्पर लम्ब होंगे यदि

$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

$\because \quad a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 7\times 1 + (-5)\times 2 + 1\times 3$

$= 7 - 10 + 3 = 10 - 10 = 0$

32. $2x = (x+y) + (x-y) = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

पुनः $2y = (x+y) - (x-y) = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

33. यदि $f(2a-x) = f(x)$, तो $\int_0^{2a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

$$\therefore \quad \int_0^{2\pi} \cos^5 x\,dx = 2\int_0^{\pi} \cos^5 x\,dx \qquad \ldots(1)$$

$[\because \cos(2\pi - x) = \cos x]$

माना कि $I = \int_0^{\pi} \cos^5 x\,dx \qquad \ldots(2)$

तो $\quad I = \int_0^{\pi} \cos^5(\pi - x)\,dx$

या $\quad I = -\int_0^{\pi} \cos^5 x\,dx \quad [\because \cos(\pi - x) = \cos x] \quad \ldots(3)$

अब $\quad (2) + (3) \Rightarrow 2I = 0 \ \therefore \ I = 0$

अतः $\quad$ (1) से, $\int_0^{2\pi} \cos^5 x\,dx = 2I = 0$; **Ans.**

34. न्यूनतमीकरण $z = -3x + 3y$ ... (i)

जबकि $x + 2y \le 8$ ... (ii)

$3x + 2y \le 12$ ... (iii)

$x \ge 0, y \ge 0$ ... (iv)

प्रथम ग्राफीय विधि हल करें रेखा $x + 2y = 8$

x	0	8
y	4	0

द्वितीय ग्राफीय विधि हल करें रेखा $3x + 2y = 12$

x	0	4
y	6	0

$x + 2y = 8$ ... (a)

$3x + 2y = 12$ ... (b)

(a) – (b) से

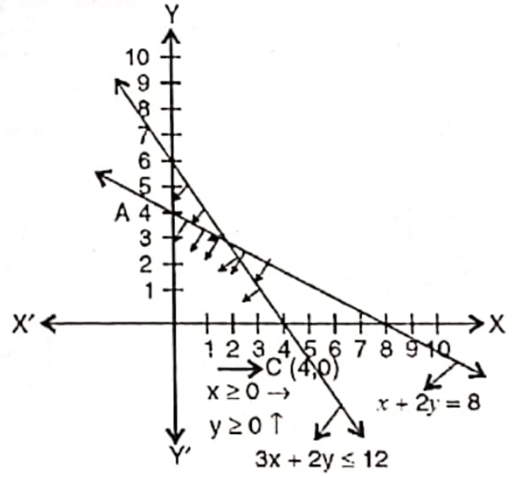
$-2x = -4$

$\therefore \quad x = 2$

x का मान (i) में रखने पर

$y = 3$

हॉफ प्लेन पर (0, 0) चूँकि $x \ge 0$ और $y \ge 0$.



प्रतिच्छेद बिन्दु (2, 3) वाले रेखा $x + 2y = 8$ और $3x + 2y = 12$ बिन्दु (2, 3) पर प्रतिच्छेद करती है।

छायांकित बिन्दु A (0, 4), B (2, 3), C (4, 0) तथा O (0. 0)

बिन्दु	$z = -3x + 3y$
A (0, 4)	12
P (2, 3)	13
C (4, 0)	–12
O (0, 0)	0

इसलिए न्यूनतमीकरण मान – 12 बिन्दु (4, 0) पर प्राप्त होगा।

35. माना कि $y = \tan^{-1}(x)$ तब $x = \tan y$ ... (i)

माना δx एक छोटा सा मान परिवर्तन x के सापेक्ष और y के सापेक्ष δy परिवर्तन होता है।

$$x + \delta x = \tan(y + \delta y) \quad \text{... (ii)}$$

समी॰ (ii) से (i) को घटाने पर,

$$x + \delta x - x = \tan(y + \delta y) - \tan y$$

$$\Rightarrow \delta x = \frac{\sin(y+\delta y)}{\cos(y+\delta y)} - \frac{\sin y}{\cos y}$$

$$\Rightarrow \delta x = \frac{\sin(y+\delta y).\cos y - \cos(y+\delta y)\sin y}{\cos y.\cos(y+\delta y)}$$

$$\Rightarrow \delta x = \frac{\sin(y+\delta y - y)}{\cos y.\cos(y+\delta y)}$$

δy से दोनों तरफ भाग देने पर

$$\frac{\delta x}{\delta y} = \frac{\sin \delta y}{\delta y} \cdot \frac{1}{\cos y.\cos(y+\delta y)}$$

$$\therefore \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta y}{\sin \delta y}.\cos y.\cos(y+\delta y)$$

$$\therefore \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\sin \delta y}.\cos y.\lim_{\delta x \to 0} \cos(y+\delta y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos y.\cos y = \cos^2 y = \frac{1}{\sec^2 y} \quad \left\{\lim_{y \to 0} \frac{\delta y}{\sin \delta y} = 1\right\}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1 \div x^2}$$

$$\therefore \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}}$$

36. $I = \int e^x \cos x \, dx$

integration by parts का प्रयोग करने पर,

$$\Rightarrow I = \cos x \int e^x dx - \int \left\{\frac{d}{dx}(\cos x).\int e^x dx\right\} dx$$

$$\Rightarrow I = \cos x.e^x - \int -\sin x.e^x dx$$

$$I = e^x.\cos x + \int e^x.\sin x \, dx$$

पुनः integration by parts का प्रयोग करने पर,

$$I = e^x.\cos x + \left[\sin x \int e^x dx - \int \left\{\frac{d}{dx}(\sin x).\int e^x dx\right\} dx\right]$$

$$\Rightarrow I = e^x.\cos x + [\sin x\, e^x - \int \cos x e^x.dx]$$

$$\Rightarrow I = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x.\cos x \, dx$$

$$\Rightarrow I = e^x \cos x + e^x \sin x - I$$

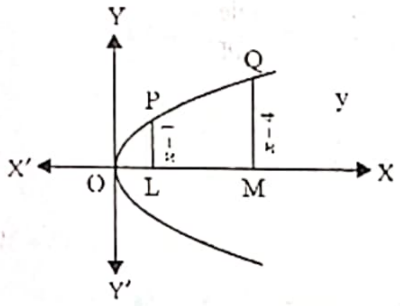
$$\Rightarrow 2I = e^x(\cos x + \sin x)$$

$$\therefore I = \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x), \text{ Ans.}$$

37. प्रश्न से, वक्र का समीकरण $y^2 = x \quad \therefore y = \sqrt{x}$

तथा $x = 1, x = 4$

स्पष्टतः क्षेत्र $ABCD$, $x = 1, x = 4$ x-अक्ष तथा वक्रों से घिरा हुआ है।



∴ सूत्र से, क्षेत्र $ABCD$ का क्षेत्रफल

$$= \int_1^4 y\,dx = \int_1^4 \sqrt{x}dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^4$$

$$= \frac{2}{3}\left[x\sqrt{x}\right]_1^4 = \frac{2}{3}[4\sqrt{4} - 1.\sqrt{1}]$$

$$= \frac{2}{3}(4 \times 2 - 1) = \frac{14}{3} \text{ वर्ग इकाई, Ans.}$$

38. $\vec{a} = \lambda\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 2\hat{i} + 6\hat{j} + 3\hat{k}$

$\because$ $\vec{a}$ पर $\vec{b}$ का प्रक्षेप = 4

$$\Rightarrow \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{(\lambda\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k})(2\hat{i} + 6\hat{j} + 3\hat{k})}{|2\hat{i} + 6\hat{j} + 3\hat{k}|} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{2\lambda + 6 + 12}{\sqrt{2^2 + 6^2 + 3^2}} = 4 \Rightarrow \frac{2\lambda + 6 + 12}{7} = 4$$

$$\Rightarrow 2\lambda + 18 = 28 \quad \Rightarrow 2\lambda = 10$$

$\therefore$ $\lambda = 5$, Ans.

❑❑❑